

IFT-66975 Complexité de Calcul Examen de mi-session

Question 1. (20 points)

Supposons que L et K sont deux langages de NP. Montrez que

1. Leur intersection $L \cap K$ est aussi dans NP.
2. Leur union $L \cup K$ est aussi dans NP.

Question 2. (20 points)

Vrai ou faux? Justifiez *brièvement*

1. Si $A \in ZPP$ alors $A \in RP$.
2. Si A est NP-complet et si $B \leq_p A$ alors B est NP-complet.
3. Si A est NP-complet et si $A \leq_p B$ alors B est NP-complet.
4. Si $A \leq_T B$ alors $A \leq_p B$.

Question 3. (50 points)

Considérons les deux problèmes de décision suivants.

1) **NAE-3SAT** (pour *not-all-equal* 3-SAT)

Entrée: variables booléennes x_1, \dots, x_n et ensemble de 3-clauses C_1, \dots, C_m formés par 3 littéraux.

Question: Peut-on assigner des valeurs aux x_i tel que chaque clause contient au moins un littéral vrai et un littéral faux?

2) **Partition sans triangle** (PST)

Entrée: graphe non-dirigé $G = (V, E)$.

Question: Peut on séparer E en deux sous-ensembles E_1, E_2 tel que les graphes $G_1 = (V, E_1)$ et $G_2 = (V, E_2)$ ne contiennent aucun triangle.

1. Montrez que NAE-3-SAT et PST sont dans NP.
2. Montrez que $PST \leq_p NAE - 3 - SAT$. (Indice: créez une variable booléenne x_e pour chaque arête du graphe avec l'intention $x_e = 1$ si et seulement si $e \in E_1$ et donc $x_e = 0$ si et seulement si $e \in E_2$.)

3. Montrez que $3 - SAT \leq_p NAE - 3 - SAT$. (à chaque clause $l_1 \vee l_2 \vee l_3$ associez deux nae-clauses $(l_1 \vee l_2 \vee u)$ et $(\bar{u} \vee l_3 \vee faux)$).

Question 4. (10 points mais plus difficile)

Considérez le problème SAT-PASSAT suivant.

Entrée: Deux formules ϕ_1, ϕ_2 en 3-CNF.

Question: A-t-on que ϕ_1 est satisfiable et ϕ_2 est insatisfiable? (En d'autres mots, $\phi_1 \in SAT$ mais $\phi_2 \notin SAT$)

Montrez que si SAT-PASSAT est dans NP alors $NP = co - NP$.