IFT-66975 Complexité de Calcul
Devoir 3

À remettre Vendredi 8 Décembre (midi)

Question 1.

Montrez qu'un graphe non-dirigé est 2-coloriable si et seulement si le graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire.

Utilisez ce résultat pour montrer que 2-COL fait partie de la classe NL. (Note: en fait 2-COL fait même partie de L mais c'est un résultat extrêmement difficile.)

Question 2.

Montrez que si PH contient un problème complet sous les transformations polynomiales alors il existe un k tel que $PH = \Sigma_k$.

Question 3.

Considérez l'algorithme suivant pour détecter si un graphe non dirigé $G = (V, E)$ possède un cycle.

Imaginons que $V = \{1, \ldots, |V|\}$ (en d'autres mots que les sommets sont numérotés de 1 à $|V|$). Un explorateur plante un drapeau sur le point 1 et se déplace ensuite sur le graphe selon le principe suivant.

- Pour chaque sommet $u \in V$ les différentes arêtes (u, v) autour du point u peuvent être ordonnées selon la taille de v. On peut donc parler de la ième arête autour de u. Notez bien que si (u, v) est la $i$ème arête autour de u il est possible que (v, u) ne soit pas la $i$ème arête autour de v.

- Si l'explorateur atteint le point u de degré k en utilisant la $i$ème arête autour de u alors il repart de u en utilisant la $(i + 1)$ème arête autour de u. Si $i = k$ alors l'explorateur repart de la première arête autour de u.

Comme première tentative, l'explorateur quitte le point 1 en utilisant la première arête autour de 1. S'il revient au point 1 par une arête différente alors il conclut que G contient un cycle. Si par contre il revient au point 1 à travers la même arête, alors il recommence son exploration en commençant par la seconde arête du point 1, puis la troisième arête et ainsi de suite. S'il a épuisé toutes les arêtes autour de 1 et qu'il est toujours revenu à 1 par la même arête, alors il plante son drapeau sur le point 2 et ainsi de suite.

Montrez que G contient un cycle si et seulement s'il existe un point u et une arête (u, v) autour de u tels que l'explorateur quittant u par l'arête (u, v) ne revient pas à u par (u, v). Quelle est la complexité d'espace de l'algorithme décrit (plus ou moins explicitement) ici?

Question 4.

Considèrons une formule booléenne ϕ sur les variables $x_1, \ldots, x_n$. Chaque vecteur de n bits $\bar{x} \in \{0, 1\}^n$ est une assignation possible aux variables et ces vecteurs peuvent être naturellement classés par ordre alphabétique. Le problème de décision PLUS-PETIT-SAT-IMPAIR consiste à déterminer, étant donnée ϕ, si la plus petite assignation $\bar{x}$ qui satsfait ϕ est telle que $x_n = 1$. Montrez que ce problème fait partie de la classe de complexité Δ_2.