IFT-66975 Complexité de Calcul
Devoir 1

À remettre Vendredi 20 Octobre (midi)

Question 1.

Démontrez que le problème des chemins disjoints est NP-complet.

Entrée: Graphe dirigé (V, E) et paires de sommets $(s_1, t_1), \dots (s_k, t_k)$.

Question: Existe-t il des chemins de chaque s_i vers chaque t_i de telle sorte que ces k chemins n'on aucun point intermédiaire en commun?

(Faites une réduction à partir de 3SAT. Pour chaque variable, créez une paire (s_i, t_i) avec deux chemins parallèles qui pourront correspondre à la valeur booléenne de cette variable. De la même façon, créez pour chaque clause une paire (s_j, t_j) avec 3 chemins parallèles.)

Pour les plus courageux: montrez que le problème demeure NP-complet si le graphe G est planaire. (remplacez les intersections d'arêtes de façon appropriée)

Question 2.

- Montrez que le complément de 3SAT est co-NP-complet.
- Soit SAT-INSAT le problème suivant:

  Entrée: deux formules ϕ_1, ϕ_2 en 3CNF.

  Question: a-t-on à la fois ϕ_1 satisfiable et ϕ_2 insatisfiable?

  Montrez que SAT-INSAT est à la fois NP-difficile et co-NP difficile.
- Soit DP la classe des langages qui sont l'intersection d'un langage de NP et d'un langage de co-NP. Montrez que SAT-INSAT est DP-complet.
- Montrez que le problème Exact-4-Col est également DP-complet.

  Entrée: Graphe $G = (V, E)$ non-dirigé.

  Question: Le nombre chromatique de G est 4. C'est à dire que 4 est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour obtenir un coloriage valide de G.

Question 3.

Montrez que le problème de pli d'une règle est NP-complet.

Entrée: une règle pliable et un entier k. La règle est une suite de n segments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ avec $a_i \in \mathbb{N}^+$. La règle peut être pliée dans un sens ou dans l'autre à chaque jonction entre deux segments.

Question: La règle peut-elle être pliée et rangée dans une boîte de largeur k.

Question 4.

Démontrez que le problème de domination par sommets (DS) est NP-complet.

Entrée Un graphe non-dirigé $G = (V, E)$ et un entier $k \leq |V|$.

Question Existe-t-il un sous-ensemble $V' \subseteq V$ avec $|V| \leq k$ qui domine le graphe, c'est à dire tel que pour tout $v \in V - V'$ il existe un $v' \in V'$ tel que $(v, v') \in E$?

(Il faut donc montrer d'une part que DS fait partie de NP et, d'autre part, qu'il existe un problème NP-complet qui se transforme en temps polynomial à DS. Le plus simple est sûrement de montrer que $VC \leq_p DS$.)