La mise sous forme clausale

Notes de cours IA1 2001, pp. 28-31, : Luger, 2002, pp.518-523

1. Éliminer les connecteurs $\rightarrow$
2. Distribuer les $\neg$
3. Renommer les variables liées
4. Préfixer les quantificateurs
5. Éliminer les $\exists$
6. Éliminer les $\forall$
7. Mettre la phrase sous forme conjonctive
8. Transformer chaque facteur en clause distincte
9. Renommer de façon distincte les variables, d'une clause à l'autre

La mise sous forme clausale

Notes de cours IA1 2001, pp. 28-31, : Luger, 2002, pp.518-523

1. Éliminer les connecteurs $\rightarrow$
- $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$

2. Distribuer les $\neg$
- $\neg (\neg A) \leftrightarrow A$
- $\neg \exists X : a(X) \leftrightarrow \forall X : \neg a(X)$
- $\neg \forall X : a(X) \leftrightarrow \exists X : \neg a(X)$
- $\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$

3. Renommer les variables liées par différents quantificateurs
4. Préfixer les quantificateurs

La mise sous forme clausale

Notes de cours IA1 2001, pp. 28-31, : Luger, 2002, pp.518-523

5. Éliminer les $\exists$: skolemisation

- $\exists X : a(X)$ est remplacé par $a(b)$ où b est une constante de skolem
- $\exists X : \forall Y : a(X,Y)$ est remplacé par $a(b,Y)$ où b est une constante de skolem (X n'est pas dans la portée de Y)
- $\forall X : \exists Y : a(X,Y)$ est remplacé par $\forall X : a(X,f(X))$ où $f(X)$ est une fonction de skolem (Y est dans la portée de X)
- $\forall X : \forall Y : \exists Z : a(X,Y,Z)$ est remplacé par $\forall X : \forall Y : a(X,f(X,Y))$ où $f(X,Y)$ est une fonction de skolem (Z est dans la portée de X et Y)

La mise sous forme clausale

Notes de cours IA1 2001, pp. 28-31, : Luger, 2002, pp.518-523

6. Éliminer les $\forall$
7. Mettre la phrase sous forme conjonctive

- $a \vee (b \vee c) \leftrightarrow (a \vee b) \vee c$
- $a \wedge (b \wedge c) \leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c$
- $a \wedge (b \vee c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

8. Transformer chaque conjonction en clause séparée

- ex : $a \vee b \wedge c$ devient $\{a \vee b, c\}$

9. Renommer de façon distincte les variables, d'une clause à l'autre

- ex : $\{a(X) \vee b(X), c(X)\}$ devient $\{a(X) \vee b(X), c(Y)\}$

Le principe de résolution

Notes de cours IA1 2001, pp.31-34

Règle de transitivité du calcul propositionnel :

$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \models p \rightarrow r$

Forme clausale :

$\{ \neg p \vee q,\ \neg q \vee r \} \models \{ \neg p \vee r \}$

Si A et B sont deux clauses **complémentaires** (qui contiennent respectivement les littéraux Φ et $\neg\Phi$), alors on peut déduire la nouvelle clause C, dite **résolvant**, obtenue en réunissant tous les littéraux de A et B sauf Φ et $\neg\Phi$.

Preuve par réfutation en logique des prédicats

- Méthode
  - négation de la conclusion
  - mise sous forme clausale
  - application du principe de résolution jusqu'à obtention de la clause vide
  - conclusion

Preuve par réfutation en logique des prédicats

Exemple #1

Prouver par réfutation que

1 $\exists X : [\, r(X) \wedge s(X) \,]$

est une conséquence logique de

2 $\exists\, Y : [p(Y) \wedge r(Y)]$

3 $\forall\, Z : [p(Z) \rightarrow (\, q(Z) \wedge s(Z)\,)]$

Preuve par réfutation en logique des prédicats

Exemple #1

- Négation de la conclusion :

1 $\exists X : [\, r(X) \wedge s(X) \,]$

devient

1' $\neg \exists X : [\, r(X) \wedge s(X) \,]$

Preuve par réfutation en logique des prédicats

Exemple #1

- Mise sous forme clausale de 1’

1. Rien à faire
2. $\forall X : \neg r(X) \vee \neg s(X)$
3. Rien à faire
4. Rien à faire
5. Rien à faire
6. $\neg r(X) \vee \neg s(X)$
7. Rien à faire
8. $\{\neg r(X) \vee \neg s(X)\}$
9. Rien à faire

Preuve par réfutation en logique des prédicats

Exemple #1

- Mise sous forme clausale de 2

1. Rien à faire
2. Rien à faire
3. Rien à faire
4. Rien à faire
5. $p(a) \wedge r(a)$, avec Y/a où a est une cste de Skolem
6. Rien à faire
7. Rien à faire
8. $\{ p(a) , r(a) \}$
9. Rien à faire

Preuve par réfutation en logique des prédicats

Exemple #1

- Mise sous forme clausale de 3

1. $\forall$ Z : [$\neg$p(Z) $\vee$ (q(Z) $\wedge$ s(Z))]
2. Rien à faire
3. Rien à faire
4. Rien à faire
5. Rien à faire
6. $\neg$p(Z) $\vee$ (q(Z) $\wedge$ s(Z))
7. $\neg$p(Z) $\vee$ q(Z) $\wedge$ $\neg$p(Z) $\vee$ s(Z)
8. {$\neg$p(Z) $\vee$ q(Z), $\neg$p(Z) $\vee$ s(Z) }
9. {$\neg$p(Z1) $\vee$ q(Z1), $\neg$p(Z2) $\vee$ s(Z2) }

Preuve par réfutation en logique des prédicats

Exemple #1

- Base de clauses initiale

1’	$\neg$ r(X) $\vee$ $\neg$ s(X)	$\neg$but
2	p(a)	H1
	r(a)	H2
3	$\neg$p(Z1) $\vee$ q(Z1)	H3
	$\neg$p(Z2) $\vee$ s(Z2)	H4

Preuve par réfutation en logique des prédicats

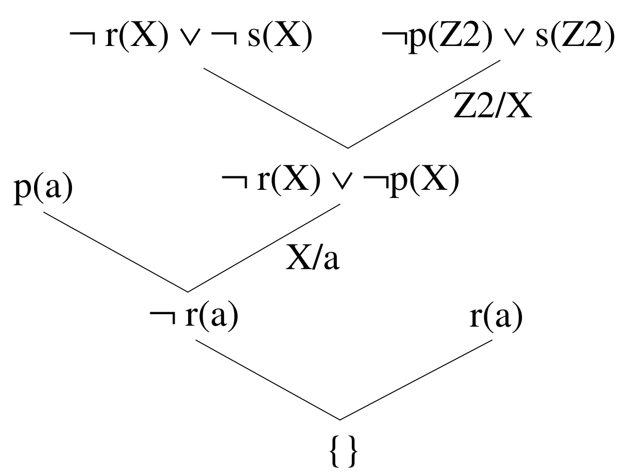
Exemple #1

- Appliquer le principe de résolution jusqu'à obtention de la clause vide

#	affirmation	justification
1.	$\neg r(X) \vee \neg s(X)$	$\neg$ but
2.	$\neg p(Z2) \vee s(Z2)$	H4
3.	$\neg r(X) \vee \neg p(X)$	(1)(2) Z2/X
4.	$p(a)$	H1
5.	$\neg r(a)$	(3)(4) X/a
6.	$r(a)$	H2
7.	{}	(5)(6)

Preuve par réfutation en logique des prédicats

Exemple #1 : arbre de résolution-réfutation



Preuve par réfutation en logique des prédicats

Exemple #1

- Conclusion

  Nous avons démontré par résolution-réfutation que

  $\exists X : [\ r(X) \wedge s(X)\ ]$

  est une conséquence logique de

  $\exists\ Y : [p(Y) \wedge r(Y)]$

  et

  $\forall\ Z : [p(Z) \rightarrow (\ q(Z) \wedge s(Z)\ )]$

En PROLOG

Exemple #1

	Logique clausale		PROLOG
1	$r(X) \wedge s(X)$	but	
2	$p(a)$	H1	p(a).
	$r(a)$	H2	r(a).
3	$\neg p(Z1) \vee q(Z1)$	H3	q(Z1):- p(Z1).
	$\neg p(Z2) \vee s(Z2)$	H4	s(Z2):- p(Z2).

```
| ?- r(X), s(X).
X = a
```