Programmation linéaire en nombres entiers :

la méthode du simplexe

Introduction

On s'intéresse à un PL où les variables sont entières, A et b aussi.

Méthode impraticable :

énumérer toutes les sol$^{\underline{n}}$s réalisables entières.

Méthode du simplexe :

en oubliant les contraintes d'intégrité, il se peut que la sol$^{\underline{n}}$ optimale soit entière auquel cas nous avons résolu le problème demandé.

Programme linéaire entier facile :

Un PLE qui, en oubliant les contraintes d'intégrité, fournit toujours une sol$^{\underline{n}}$ optimale entière par une méthode de résolution des programmes linéaires.

Unimodularité

- À chaque itération de la méthode du simplexe, on veut que la base réalisable admette une sol$^{\underline{n}}$ de base réalisable <u>entière</u> et vu que la sol$^{\underline{n}}$ optimale est aussi une sol$^{\underline{n}}$ de base réalisable, elle sera entière.

- De plus, à une itération quelconque, $x_B = B^{-1}\, b$ et $x_R = 0$.

- Pour que cette sol$^{\underline{n}}$ soit entière, il est nécessaire que x_B soit entier.

- Mais b étant entier, il suffit que B^{-1} soit une matrice entière.

- Nous savons que : $B^{-1} = (B^*)^t / \det B$
  où B^* désigne la matrice des cofacteurs.
  Mais vu que A est entière, il s'ensuit que B^* est entière.

  Il suffit donc que det B soit égal à ± 1 pour que B^{-1} soit entière.

Soit B une matrice carrée d'ordre n, B est **unimodulaire** si $\det(B) \in \{0, 1, -1\}$.

Les matrices suivantes par exemple sont unimodulaires:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ainsi, si B est unimodulaire, nous sommes assurés que la solution de base sera entière.

Mais cela ne nous dit pas si la solution optimale est entière.

Cependant, si B est unimodulaire pour toutes les bases réalisables B, <u>toute</u> solution réalisable sera entière et il en sera de même pour la solution optimale.

Soit A une matrice m x n, A est **totalement unimodulaire** si **toute** sous-matrice carrée B d'ordre k, $1 \leq k \leq \min(m, n)$, extraite de A est **unimodulaire**.

Note : tous les éléments d'une matrice A totalement unimodulaire doivent être 0, 1 ou –1.

Théorème :

Soit le programme linéaire entier

$$\text{Max} \quad z = c^t x \qquad \text{(PLE)}$$

$$\text{sujet à } Ax = b,\ x \geq 0,\ x \text{ entier,}$$

si A est **totalement unimodulaire**, alors le programme linéaire associé à (PLE):

$$\text{Max} \quad z = c^t x \qquad \text{(PL)}$$

$$\text{sujet à } Ax = b,\ x \geq 0.$$

admet une solution optimale entière qui est aussi solution optimale de (PLE).

Exemple :

Soit à résoudre

$$\text{Min} \quad z = x_1 + x_2 + 5\,x_3$$

$$\text{sujet à} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \text{ entiers.} \end{cases}$$

Vu que la matrice A

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

est totalement unimodulaire, la solution optimale de ce problème est celle du programme linéaire associé obtenu en oubliant les contraintes d'intégrité du problème à résoudre.

Après l'application de la méthode du simplexe, on obtient la solution optimale: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$ et $z_{min} = 45$. ■

Théorème (conditions suffisantes pour être totalement unimodulaire)

Soit A une matrice mxn n'ayant que des entrées 0, +1 ou -1, A est totalement unimodulaire, s'il existe une partition de ses lignes (resp. de ses colonnes) I, J, $I \cup J$ égal à l'ensemble de ses lignes (resp. de ses colonnes), $I \cap J = \emptyset$ telle que:

(a) il y a au plus deux éléments non-nuls dans chaque colonne de A (resp. ligne de A);

(b) s'il y a deux +1 ou deux -1 dans une colonne (resp. ligne) de A, alors les deux lignes (resp. colonnes) de A qui contiennent ces +1 ou ces -1 ne sont pas dans le même sous-ensemble d'indices.

(c) s'il y a un +1 et un -1 dans une colonne (resp. ligne) de A, alors les deux lignes (resp. colonnes) de A qui contiennent ce +1 et ce -1 sont dans le même sous-ensemble d'indices, soit I, soit J.

Exemple :

Voici une application du théorème précédent. Par exemple, la matrice ci-contre

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

est totalement unimodulaire. Il suffit d'appliquer le théorème précédent et de prendre comme partition I = {ligne1, ligne3} et J = {ligne2, ligne4}.

■

Théorème (conditions suffisantes pour être totalement unimodulaire)

Soit le programme linéaire entier

$$\text{Max} \quad z = c^t x \qquad \text{(PLE)}$$
$$\text{sujet à } Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x \text{ entier}$$

si A est totalement unimodulaire, alors le programme linéaire associé à (PLE) est:

$$\text{Max} \quad z = c^t x$$
$$\text{sujet à } Ax \leq b,\ x \geq 0$$

lequel admet une solution optimale entière qui est aussi solution optimale de (PLE).

Applications : problème de transport entier

Un industriel désire transporter à un coût minimal un certain bien en quantités entières depuis m entrepôts (il dispose du bien en quantité a_i au $i^{ième}$ entrepôt) vers n magasins (la quantité de bien demandé au $j^{ième}$ magasin est b_j) alors que les coûts unitaires de transport depuis le $i^{ième}$ entrepôt vers le $j^{ième}$ magasin sont c_{ij}.

Si x_{ij} représente la quantité de bien transporté du $i^{ième}$ entrepôt au $j^{ième}$ magasin, pour tout i, j, le programme linéaire entier s'écrit:

$$\text{Min} \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujet à:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

quantités entières

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0, \; \textbf{entier}, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Écrivons ce problème sous une forme plus développée.

$$\text{Min} \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujet à:

$$\begin{array}{lllllllllr}
x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & & & & & & & & \le a_1 \\
 & & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & & & & & & & \le a_2 \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & & & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & & & \le a_m \\
x_{11} & & + x_{21} & & \dots & & + x_{m1} & & & \ge b_1 \\
 & x_{12} & & + x_{22} & & \dots & & + x_{m2} & & \ge b_2 \\
 & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \\
 & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & \\
 & & & \cdot & & \cdot & & & \cdot & \\
 & & x_{1n} & & & + x_{2n} & \dots & & + x_{mn} & \ge b_n
\end{array}$$

$$x_{ij} \ge 0, \text{ entier}, \ i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n$$

Pour mettre ce programme sous forme canonique, il suffit de multiplier par (-1) les inégalités où les b_j interviennent. On obtient alors comme matrice A des contraintes:

$$\left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 \dots 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & .. & 0 & 0 \dots 0 \\
0 & 0 \dots 0 & 1 & 1 \dots 1 & 0 & 0 \dots 0 & .. & 0 & 0 \dots 0 \\
0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & 1 \dots 1 & .. & 0 & 0 \dots 0 \\
 & & & & \dots & & & & \\
 & & & & & \dots & & & \\
 & & & & & & & \dots & \\
0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & .. & 1 & 1 \dots 1 \\
-1 & 0 \dots 0 & -1 & 0 \dots 0 & -1 & 0 \dots 0 & .. & -1 & 0 \dots 0 \\
0 & -1 \dots 0 & 0 & -1 \dots 0 & 0 & -1 \dots 0 & .. & 0 & -1 \dots 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & 0 \dots -1 & 0 & 0 \dots -1 & 0 & 0 \dots -1 & .. & 0 & 0 \dots -1
\end{array}\right|$$

On pose **I** = l'ensemble des lignes et **J** = $\emptyset$.

A est totalement unimodulaire.

Applications : problème d'affectation

- Il s'agit par exemple d'affecter des équipages à des vols d'avions, du personnel à des machines, des fonds monétaires précis à des agences gouvernementales, etc.

- Par exemple, une compagnie dispose de N employés et de N machines. Notons les employés $E_1, E_2, \ldots, E_N$ et les machines $M_1, M_2, \ldots, M_N$.

- Cependant, chaque employé de cette compagnie ne peut pas travailler sur toutes les machines, cela dépend de sa propre spécialisation.

Nous représentons les possibilités de travail par le tableau ci-contre où

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } E_i \text{ peut travailler sur } M_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad ; i,j = 1,2, \ldots, N$$

	M_1	M_2	...	M_j	...	M_N
E_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1N}
E_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2N}
$\vdots$						
E_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{iN}
$\vdots$						
E_N	a_{N1}	a_{N2}	...	a_{Nj}	...	a_{NN}

De plus, si l'employé E_i travaille sur la machine M_j, il en coûte c_{ij} dollars à la compagnie. L'objectif de la compagnie est d'affecter à chaque employé une et une seule machine et réciproquement, en minimisant le coût total de cette affectation. En posant

$$x_{ij} = \left|\begin{array}{l} 1 \text{ si } E_i \text{ est affecté à } M_j \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right. \qquad ; i,j = 1,2, ..., N$$

Note : Si $a_{ij} = 0$, on supposera que $c_{ij} = +\infty$ ce qui implique que $x_{ij} = 0$. En pratique, x_{ij} est omise dans le modèle.

L'employé E_i ne peut être affecté qu'à une machine, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, x_{ij} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, N$$

De même, une machine ne peut recevoir sous les hypothèses qu'un employé, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\, x_{ij} = 1, \; j = 1, 2, \ldots, N$$

$$\text{Min} \quad z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij}$$

sujet à:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_{ij} = 1, i = 1, 2, ..., N \qquad \text{(I)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} x_{ij} = 1, j = 1, 2, ..., N \qquad \text{(J)}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, i = 1, 2, ..., N; j = 1, 2, ..., N$$

Programme linéaire entier à variables bivalentes 0-1.

A est totalement unimodulaire ce qui implique qu'on peut remplacer $x_{ij} = 0$ ou 1 par $x_{ij} \geq 0$.

Exemple :

Soit le problème d'affectation défini par les matrices:

a_{ij}	M_1	M_2	M_3
E_1	1	1	0
E_2	0	1	1
E_3	1	0	1

c_{ij}	M_1	M_2	M_3
E_1	6	8	∞
E_2	∞	4	5
E_3	3	∞	4

Nous obtenons après la mise en équations le programme

$$
\left|
\begin{array}{llllllll}
\text{Min} \quad z = & 6x_{11} + 8x_{12} & + 4x_{22} + 5x_{23} + & & 3x_{31} + 4x_{33} & \\
& x_{11} + x_{12} & & & & = 1 \\
& & x_{22} + x_{23} & & & = 1 \\
& & & & x_{31} + x_{33} & = 1 \\
& x_{11} & & + & x_{31} & = 1 \\
& \quad x_{12} + x_{22} & & & & = 1 \\
& & \quad x_{23} & & + x_{33} & = 1 \\
& x_{ij} = 0 \text{ ou } 1. & & & &
\end{array}
\right.
$$

Remarquons en premier lieu que nous ne tenons pas compte des variables x_{13}, x_{21} et x_{32} que nous considérons comme toujours nulles; autrement, nous aurions un coût minimal infini ce qui ne peut avoir lieu s'il existe des solutions réalisables.

Nous pouvons remplacer la contrainte $x_{ij} = 0$ ou 1 par $x_{ij} \geq 0$.

Appliquant la méthode du simplexe, nous obtenons comme solution optimale:

$x_{11} = x_{22} = x_{33} = 1$, $x_{12} = x_{23} = x_{31} = 0$ avec $z_{min} = 14$.

Cependant, il existe un algorithme beaucoup plus simple pour résoudre un problème d'affectation.