# Post-optimisation, analyse de sensibilité et paramétrage

Introduction, la post-optimisation (modification discrète du vecteur b, modification des coefficients de la fonction économique z, addition d'une variable, modification des coefficients d'une colonne de A, addition d'une ou de plusieurs contraintes), analyse de sensibilité (analyse de sensibilité sur les éléments de b, analyse de sensibilité sur les coefficients de la fonction économique), paramétrage (paramétrage du vecteur b, paramétrage de la fonction objectif z, paramétrage de la matrice des coefficients, paramétrages multiples.

# Introduction

Après avoir formulé et résolu un problème PL, quelle est la conséquence sur la solution optimale d'une variation des données numériques du problème ?

- Les données d'un problème sont souvent des estimations en pratique et sont donc entachées d'erreur.

- Le gestionnaire aime bien savoir :
  - quel est le taux de variation de l'objectif p/r aux données A, b, c?
  - de combien on peut faire varier chaque donnée sans changer la base optimale ?

- Cela fait l'objet d'étude de ce qu'on appelle la **post-optimisation**, **l'analyse de sensibilité** et le **paramétrage**.

# Post-optimisation

- Problèmes dans lesquels on effectue une modification «discrète» des données :

  matrice **A** des coefficients,
  vecteur constant **b** ou
  le vecteur de coût **c**.

- Généralement, on distingue dans cette catégorie six sortes de modifications :
  – b seul change d'une quantité discrète,
  – c seul change d'une quantité discrète,
  – une variable est ajoutée au système,
  – une contrainte est ajoutée au système,
  – une seule colonne de A change d'une q$^{\underline{\text{té}}}$ vectorielle discrète,
  – une seule ligne de A change d'une q$^{\underline{\text{té}}}$ vectorielle discrète.

Ces modifications peuvent être combinées.

## Analyse de sensibilité

Il s'agit plutôt d'explorer le «voisinage» d'une sol$^{\underline{n}}$ optimale i.e. déterminer l'intervalle de variation dans lequel une donnée peut changer sans que la base optimale soit modifiée.

Il est important de savoir si la sol$^{\underline{n}}$ obtenue est stable : une légère modification d'une donnée la rend-elle caduque ?

## Paramétrage

l'opération consistant à faire varier des données de façon continue.

Cette opération dans sa forme générale ne peut être résolue.

Nous étudierons plutôt les cas suivants:

- b varie linéairement en fonction d'un paramètre $\theta$,
- c varie linéairement en fonction d'un paramètre $\theta$,
- un élément $a_{ij}$ de A varie linéairement en fonction de $\theta$,
- plusieurs paramètres interviennent linéairement dans b ou c.

# Remarques générales

- La valeur $x_B$ d'une sol$^{\underline{n}}$ de base correspondant à une base B est $B^{-1}b$; elle ne dépend aucunement du vecteur c.

Une modification du vecteur c ne change pas la valeur de la sol$^{\underline{n}}$ qui reste une sol$^{\underline{n}}$ réalisable; mais celle-ci peut cesser d'être optimale i.e., le vecteur des multiplicateurs cesse d'être une sol$^{\underline{n}}$ duale-réalisable

- Le critère d'entrée de la méthode du simplexe ne fait intervenir que les coûts relatifs $c_j - c^t_B B^{-1} a_{.j}$, qui ne dépendent pas du vecteur b.

Si l'on modifie le vecteur b, la sol$^{\underline{n}}$ $x_B$ peut cesser d'être une sol$^{\underline{n}}$ réalisable mais reste «duale-réalisable» (c'est-à-dire que $x_B$ peut devenir une sol$^{\underline{n}}$ irréalisable satisfaisant au critère d'optimalité); le vecteur des multiplicateurs reste donc une sol$^{\underline{n}}$ duale-réalisable.

# Post-optimisation

## Modification discrète du vecteur b

Soit $b + \Delta b$ la nouvelle valeur du second membre et $x'_B$ la nouvelle solution de base associée à l'ancienne base optimale B:

$$
\begin{aligned}
x'_B &= B^{-1}(b + \Delta b) \\
&= x_B + B^{-1}\Delta b.
\end{aligned}
$$

Deux cas sont à distinguer :

**a)** si $x_B + B^{-1}\Delta b \geq 0$ alors $x'_B$ est la nouvelle solution optimale.

**b)** si au moins l'une des composantes du vecteur $x_B + B^{-1}\Delta b$ est négative, la nouvelle solution de base $x'_B$ n'est pas réalisable.

La méthode la plus rapide pour réoptimiser est d'utiliser l'algorithme dual du simplexe.

Grâce au tableau suivant:

$$\left|\begin{array}{ccc} B & R & b \\ c^t_B & c^t_R & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} I & B^{-1}R & B^{-1}b \\ 0 & (c^t_R - c^t_B B^{-1}R) & -\ c^t_B B^{-1}b \end{array}\right|$$

on voit facilement qu'en modifiant le vecteur b, seul la dernière colonne est changée:

$$\left|\begin{array}{l} B^{-1}b \quad + B^{-1}\Delta b \\ -\ c^t_B B^{-1}b -\ c^t_B B^{-1}\Delta b \end{array}\right|$$

## Exemple :

Considérons le problème suivant:

$$\begin{array}{llllll} \text{Min } z = & -3x_1 & - x_2 & - 3x_3 & \\ \text{sujet à} & 2x_1 & + x_2 & + x_3 & \leq 2 \\ & x_1 & + 2x_2 & + 3x_3 & \leq 5 \\ & 2x_1 & + 2x_2 & + x_3 & \leq 6 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.} \end{array}$$

Il est facile de vérifier que le tableau optimal pour ce problème est :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 1/5 |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 8/5 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 27/5 |

Supposons que l'on considère maintenant le problème où $b^t = (2, 5, 6)$ est changé pour $b + \Delta b = (4, 6, 8)^t$. Quelle est la solution optimale de ce nouveau problème ?

La nouvelle solution sera:

$$B^{-1}\Delta b = \begin{vmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où, $\quad x'_B = x_B + B^{-1}\,\Delta b = (6/5, 8/5, 4)^t \geq 0$ .

Donc, la nouvelle solution $x'_B$ reste optimale pour le nouveau problème. De plus,

$$-z = -\ c^t_B B^{-1} b - c^t_B\, B^{-1}\,\Delta b = -27/5\ -3 = -42/5. \qquad \blacksquare$$

## Exemple :

Reconsidérons le problème précédent où, cette fois, le vecteur $b = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix}$

est changé pour $b + \Delta b = \begin{vmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{vmatrix}$.

Vérifions d'abord si $x'_B$ reste réalisable.

$$B^{-1}\Delta b = \begin{vmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/5 \\ 6/5 \\ 2 \end{vmatrix}$$ d'où,

$$x'_B = x_B + B^{-1}\Delta b = \begin{vmatrix} 1/5 \\ 8/5 \\ 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3/5 \\ 6/5 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/5 \\ 14/5 \\ 6 \end{vmatrix} \leftarrow$$

Il faut donc appliquer l'algorithme dual du simplexe :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | **-1/5** | 0 | -2/5 |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 14/5 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 6 |
| 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 36/5 |

↑

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | -1 | 0 | -3 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 6 |
| 3 | 2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 6 |

D'où $x'_B = (2, 2, 6)^t$ et $z' = -6$.

# Post-optimisation

## Modification des coefficients de la fonction objective

Soit $c + \Delta c$ la nouvelle valeur de c.

La valeur de la solution de base associée à B reste inchangée tandis que:

i) le vecteur des coûts relatifs passe de $c^t_R - c^t_B B^{-1}R$ à

$c^t_R + \Delta c^t_R - (c_B + \Delta c_B)^t B^{-1}R.$

ii) la valeur de l'objectif passe de $- c^t_B B^{-1}b$ à $- (c_B + \Delta c_B)^t B^{-1}b.$

## $1^{\underline{e}}$ cas :

si $c^t_R + \Delta c^t_R - (c_B + \Delta c_B)^t B^{-1}R \geq 0$, la solution $x_B$ est encore une solution de base réalisable optimale.

La nouvelle valeur de l'objectif est $-z = -\underline{z} - \Delta c^t_B B^{-1}b$.

Cette valeur n'est donc altérée que si les composantes de c qui constituent $c_B$ le sont.

## $2^{\underline{ième}}$ cas :

Il existe au moins un indice $j \in J$ tel que $\underline{c}'_j < 0$ où

$$\underline{c}' = [c^t_R + \Delta c^t_R - (c_B + \Delta c_B)^t B^{-1}R]^t$$

$$= [c^t_R - c^t_B B^{-1}R]^t + [\Delta c^t_R - \Delta c^t_B B^{-1}R]^t$$

La solution $x_B$ n'est plus optimale.

On poursuit les itérations en appliquant l'algorithme primal du simplexe à partir du dernier tableau optimal du problème primitif mis à jour.

## Exemple :

Revenons toujours à notre exemple-type:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Min } z = & -3x_1 & -x_2 & -3x_3 & \\
\text{sujet à} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 5 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 6 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.}
\end{array}
$$

avec le tableau optimal suivant pour ce problème:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 1/5 |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 8/5 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 27/5 |

## 1$^{e}$ cas :

Supposons que la fonction objectif z est changée en $-4x_1 - 2x_2 - 2x_3$.

En recalculant les nouveaux facteurs de coûts relatifs pour les variables hors base, on obtient:

$$\underline{c}' = \left| \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}^t - \begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}^t \begin{vmatrix} 1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 3/5 & -1/5 & 2/5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right|^t$$

$$= \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}^t = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}^t \geq 0$$

**La sol$^{\underline{n}}$ $x_B$ reste donc optimale.**

On vérifie facilement que le tableau final du problème modifié est de la forme :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 1/5 |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 8/5 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 4 |

## $2^{ième}$ cas :

On suppose maintenant que la nouvelle fonction objectif $z'$ est de la forme $-5x_1 - x_2 - 2x_3$.

Ce qui entraîne donc: $\underline{c}' = (6/5, 13/5, -1/5)^t$.

On doit ainsi former le tableau suivant et appliquer l'algorithme primal du simplexe:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 1/5 | |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | **2/5** | 0 | 8/5 | ← |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 4 | |
| 0 | 6/5 | 0 | 13/5 | -1/5 | 0 | 21/5 | |
| | | | | ↑ | | | |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 3/2 | 5/2 | -1/2 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | 3/2 | 1/2 | 5/2 | 0 | 0 | 5 |

La solution optimale est: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, $z = -5$. ■

# Post-optimisation

## Addition d'une variable

- L'addition d'une nouvelle variable $x_{n+1}$ s'accompagne évidemment de l'addition à A d'une n+1$^{\underline{ième}}$ colonne $a_{n+1}$ et à c d'une composante $c_{n+1}$.

- L'ancienne sol$^{\underline{n}}$ de base réalisable qui était optimale pour le problème primitif reste une sol$^{\underline{n}}$ de base réalisable pour le problème modifié, mais peut ne plus être optimale.

### 1$^{\underline{e}}$ cas :

Si $c_{n+1} - c^t_B\, B^{-1}\, a_{n+1} \geq 0$, l'ancienne sol$^{\underline{n}}$ optimale est aussi une sol$^{\underline{n}}$ optimale du problème modifié.

### 2$^{\underline{ième}}$ cas :

Autrement, on peut encore améliorer l'ancienne sol$^{\underline{n}}$ optimale en introduisant $x_{n+1}$ dans la base. L'algorithme primal du simplexe peut être appliqué directement à partir du dernier tableau (optimal) du problème primitif complété par une $(n + 1)^{\underline{ième}}$ colonne $B^{-1}a_{n+1}$.

**Exemple :** (1e cas )

Supposons qu'on veut introduire une nouvelle variable, dénotée par $x_4$, dans notre exemple-type de la façon suivante:

$$\begin{array}{llllll} \text{Min } z^1 = & -3x_1 & -x_2 & -3x_3 & +2x_4 & \\ \text{sujet à} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & \leq 2 \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & \leq 5 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & \leq 6 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. & & & & \end{array}$$

avec le tableau optimal suivant pour le problème original:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 1/5 |
| | 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 8/5 |
| | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 4 |
| $-\pi$ | 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 27/5 |

Il s'ensuit que:

$$\underline{c}_4 = 2 - \overbrace{(-6/5, -3/5, 0)}^{-\pi} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

$= c_4 - \pi^t a_{n+1}$ ou encore $c_4 - c_B^t B^{-1} a_4$

Donc, l'ancienne solution reste optimale pour le problème modifié avec toujours $z^1_{min} = -27/5$.

On vérifie facilement que le tableau final du problème modifié est de la forme:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | -1 | 1/5 |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 1 | 8/5 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 2 | 27/5 |

$B^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

# Exemple : (2ième cas )

Supposons maintenant qu'après avoir ajouté $x_4$ à l'exemple-type, le problème modifié devient:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Min } z^1 = & -3x_1 & - x_2 & - 3x_3 & - x_4 & \\
\text{sujet à} & 2x_1 & + x_2 & + x_3 & - 5x_4 & \leq 2 \\
 & x_1 & + 2x_2 & + 3x_3 & + 5x_4 & \leq 5 \\
 & 2x_1 & + 2x_2 & + x_3 & - x_4 & \leq 6 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4.}
\end{array}
$$

On obtient:

$$\underline{c}_4 = -1-(-6/5, -3/5, 0)\begin{vmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

On calcule alors:

$$\underline{a}_4 = B^{-1}a_4 = \begin{vmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

On applique ensuite l'algorithme primal du simplexe au tableau:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | -4 | 1/5 | |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | **3** | 8/5 | ← |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 4 | 4 | |
| 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | -4 | 27/5 | |
| | | | | | | ↑ | | |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4/3 | 1/3 | 1/3 | 0 | 0 | 7/3 |
| 0 | 1/5 | 1/3 | -1/15 | 2/15 | 0 | 1 | 8/15 |
| 0 | 1/5 | -4/3 | -11/15 | -8/15 | 1 | 0 | 28/15 |
| 0 | 33/15 | 4/3 | 14/15 | 17/15 | 0 | 0 | 113/15 |

La solution optimale du problème modifié est:

$$x_1 = 7/3,\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 8/15 \text{ et } z^1{}_{min} = -113/15.$$

# Post-optimisation

## Modification des coefficients d'une colonne de A

On remplace la colonne $a_k$ de A par $a'_k$.

**1e cas :** la colonne modifiée correspond à une variable hors base

Le raisonnement précédent correspondant à l'addition d'une variable est intégralement applicable; il s'agit de remplacer l'indice n+1 par k.

**2ième cas :** la colonne modifiée correspond à une variable de base

La nouvelle matrice $B'$ obtenue par substitution de $a'_k$ à $a_k$ dans B peut ne plus être une base;

si $B'$ est encore une base, la solution de base correspondante peut ne plus être réalisable;

si $x'_B$ est réalisable, il peut ne plus être optimal.

La condition nécessaire et suffisante pour que B' soit une base est :

$\underline{a}'_{kk} \neq 0$.

Si cette condition est réalisée, on sait calculer la nouvelle base inverse $B'^{-1}$ en appliquant des transformations élémentaires sur :

$(B^{-1} : B^{-1} a'_k)$

pour en arriver à : $(B'^{-1} : e_k)$.

La nouvelle sol$^{\underline{n}}$ de base est $x'_B = B'^{-1}b$ et les nouvelles valeurs du vecteur de coût relatif sont alors : $\underline{c}' = c^t_R - c^t_B B'^{-1} R$.

Parmi les cas possibles, trois sont relativement simples:

a) $B'$ est une base, $x'_B$ est non négatif et satisfait aux conditions d'optimalité $\underline{c}' \geq 0$.

$x'_B$ est alors une solution optimale du nouveau problème; aucun calcul n'est nécessaire.

b) $B'$ est une base, $x'_B$ est réalisable mais non optimal.

On applique l'algorithme primal avec $x'_B$ comme solution de base réalisable initiale.

c) $B'$ est une base, $x'_B$ vérifie les conditions d'optimalité $\underline{c}' \geq 0$ mais n'est pas non négatif.

On applique l'algorithme dual du simplexe.

Si aucun de ces 3 cas ne s'applique, il se peut que l'on doive recommencer la résolution de ce problème modifié au tout début.

## Exemple :

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Min } z = & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 & -4x_4 & -2x_5 & -5x_6 & \\
\text{sujet à} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & +2x_6 & = 10 \\
& & +2x_2 & & +2x_4 & +x_5 & +3x_6 & = 6 \\
& x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +5x_4 & +x_5 & +9x_6 & = 25 \\
& \multicolumn{7}{l}{x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.}
\end{array}
$$

Une fois résolu par la méthode des 2 phases, on obtient :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | -2 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 4 | 9 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 3 | 6 |
| 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 3 | 33 |

## $1^{e}$ cas :

On change la colonne $a_4 = (1, 2, 5)^t$ en $a_4 = (1, 1, 5)^t$.

Comme il s'agit d'une colonne correspondante à une variable hors base, on n'a qu'à calculer

$$B^{-1}\, a'_4 \text{ et } \underline{c}'_4 = c_4 - c^t_B\, B^{-1} a'_4.$$

Ici, $B^{-1} = (a_1, a_3, a_5)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Ce qui donne

$$B^{-1} a'_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

et $\underline{c}'_4 = -4 - (-3, -2, -2) \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} = -2 < 0.$ ⇒ **Algorithme primal du simplexe**

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -2 | 0 | -2 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | <u>3</u> | 0 | 4 | 9 | ← |
| 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 3 | 6 | |
| 0 | 2 | 0 | -2 | 0 | 3 | 33 | |
| | | | ↑ | | | | |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2/3 | 2/3 | 0 | 0 | 2/3 | 7 |
| 0 | 1/3 | 1/3 | 1 | 0 | 4/3 | 3 |
| 0 | 5/3 | -1/3 | 0 | 1 | 5/3 | 3 |
| 0 | 8/3 | 2/3 | 0 | 0 | 17/3 | 39 |

La solution optimale du problème modifié est:

$$x_1 = 7,\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 3,\ x_5 = 3,\ x_6 = 0 \text{ et } z_{min} = -39.$$

**2$^{\text{ième}}$ cas :** $a_1 = (1, 0, 1)^t \rightarrow a'_1 = (1, 0, -1)^t$

$a_1$ est une colonne de base.

Vérifions que B' obtenue par substitution de $a'_1$ à $a_1$ reste une base :

$$B^{-1} a'_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

(3 est différent de 0).

Déterminons l'inverse de B' :

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & \underline{3} \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 2/3 & 1/3 & -1/3 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Nous avons alors:

$$x'_B = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 \\ 6 \\ 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 29/3 \\ 6 \end{vmatrix} \geq 0.$$

$$\underline{c}' = (-4, \overset{c_R}{-4}, -5) - (-3, -2, -2) \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (2, 5/3, 13/3) \geq 0.$$

Aucun calcul n'est nécessaire, la solution reste optimale.

# Post-optimisation

## Addition d'une ou plusieurs contraintes

- Le # de contraintes a une grande influence sur le volume des calculs, puisqu'il détermine l'ordre de la base.

- Il peut être intéressant de résoudre un problème partiel ne comportant qu'une partie des contraintes lorsqu'on suppose que certaines inéq$^{\underline{n}}$s ne seront pas saturées dans la valeur du programme optimal .

- Il se peut aussi que des contraintes aient été oubliées.

**1$^{\underline{e}}$ cas :**

La sol$^{\underline{n}}$ optimale du problème partiel vérifie les contraintes supplémentaires.

⬇

La sol$^{\underline{n}}$ est aussi optimale pour le problème complet.

## 2$^{\text{ième}}$ cas :

Certaines contraintes supplémentaires ne sont pas satisfaites.

⬇

L’optimum doit être recalculé pour le problème complété.

On aura intérêt à ajouter immédiatement toutes les contraintes supplémentaires, qu'elles soient vérifiées ou non, de façon à éviter une nouvelle sous-optimisation.

On applique alors l'algorithme dual du simplexe après avoir éliminé les variables de base hors de ces contraintes.

## Exemple :

$$\begin{array}{lllll} \text{Min } z = & -3x_1 & - x_2 & - 3x_3 & \\ \text{sujet à} & 2x_1 & + x_2 & + x_3 & \leq 2 \\ & x_1 & + 2x_2 & + 3x_3 & \leq 5 \\ & 2x_1 & + 2x_2 & + x_3 & \leq 6 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.} \end{array}$$

où on ajoute la contrainte supplémentaire : $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$.

On forme alors le tableau:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 0 | 1/5 |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 0 | 8/5 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 0 | 27/5 |

Après élimination des variables de base $x_1$ et $x_3$ hors de la dernière contrainte, on obtient le tableau suivant :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 0 | 1/5 |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 0 | 8/5 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | -2 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 0 | 27/5 |

La sol$^{\underline{n}}$ optimale du problème partiel (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4) vérifie cette contrainte supplémentaire : 2(1/5) – 0 + 1 (1/5) = 2 < 4, ce qui permet de conclure que la sol$^{\underline{n}}$ optimale du problème complet reste identique.

## Exemple :

$$\begin{array}{llllll}
\text{Min } z = & -3x_1 & -x_2 & -3x_3 & \\
\text{sujet à} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 5 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 6 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.}
\end{array}$$

où on ajoute la contrainte supplémentaire : $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$.

De façon évidente, la sol$^{\underline{n}}$ optimale du problème partiel ne vérifie pas cette nouvelle contrainte.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 0 | 1/5 | |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 0 | 8/5 | |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 | |
| 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | ← |
| 0 | 7/5 | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 0 | 27/5 | |

Après élimination des variables de base $x_1$ et $x_3$ hors de la dernière contrainte, on obtient :

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/5 | 0 | 3/5 | -1/5 | 0 | 0 | 1/5 | |
| 0 | 3/5 | 1 | -1/5 | 2/5 | 0 | 0 | 8/5 | |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 4 | |
| 0 | **-2** | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | ← |
| 0 | **7/5** | 0 | 6/5 | 3/5 | 0 | 0 | 27/5 | |
| | ↑ | | | | | | | |

etc.

Algorithme dual du simplexe

# Analyse de sensibilité

## Les éléments de b

À partir d'une sol$^{\underline{n}}$ optimale, de combien peut-on faire varier un élément de b, disons $b_i$, sans que la base cesse d'être optimale ?

Ce changement est de la forme $b + \Delta\, e_i$, où $e_i$ est le vecteur unitaire dont la $i^{\underline{ième}}$ composante vaut 1.

La sol$^{\underline{n}}$ obtenue demeure réalisable et optimale si $B^{-1}\,(b + \Delta\, e_i) \geq 0$.

Notons $\underline{b} = B^{-1}\, b$ et $B^{-1}_{\cdot i} = B^{-1}\, e_i =$ la $i^{\underline{ième}}$ colonne de $B^{-1}$, il faut alors

$$\underline{b}_k + B^{-1}_{ki}\,\Delta \geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

c'est-à-dire,

$$\Delta_i = \underset{1\le k\le m}{\text{Max}} \left| \frac{-\underline{b}_k}{B^{-1}{}_{ki}} : \quad B^{-1}{}_{ki} > 0 \right| \le \Delta$$

$$\Delta \le \underset{1\le k\le m}{\text{Min}} \left| \frac{-\underline{b}_k}{B^{-1}{}_{ki}} : \quad B^{-1}{}_{ki} < 0 \right| = \Delta_s.$$

La plage de variation de $b_i$ est alors $[b_i + \Delta_i, b_i + \Delta_s]$.

La plage de variation correspondante de la fonction objectif est:

$$[c^t{}_B\, B^{-1}\, b + \Delta_i\, c^t{}_B\, B^{-1} e_i,\ c^t{}_B\, B^{-1}\, b + \Delta_s\, c^t{}_B\, B^{-1} e_i].$$

## Exemple :

Reprenons notre exemple-type et étudions l'analyse de sensibilité de la sol$^{\underline{n}}$ optimale par rapport à l'élément $b_1$.

On a:

$$x_B + \Delta B^{-1} e_1 = \begin{vmatrix} 1/5 \\ 8/5 \\ 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \geq 0$$

D'où,

$$\begin{aligned} 3/5\Delta + 1/5 &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -1/3 \\ -1/5\Delta + 8/5 &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 8 \\ 4 - \Delta &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 4 \end{aligned}$$

Donc,

$$\Delta_i = -1/3$$

$$\Delta_s = 4.$$

La sol$^{\underline{n}}$ demeure réalisable et optimale $\forall b_1 \in [2 - 1/3, 2 + 4] = [5/3, 6]$.

D'autre part, la valeur minimale de l'objectif varie dans l'intervalle

$$[-27/5 - 24/5, -27/5 + 2/5].$$

$c^t_B\ B^{-1}b$ $\qquad\qquad$ $\Delta_i\ c^t_B\ B^{-1}e_1$

$$-1/3\ (-3\ \ -3\ \ 0)\begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2/5.$$

## Analyse de sensibilité

## Les coefficients de l'objectif

Calcul de l'intervalle de variation de $c_j$ sans changer la base optimale et les valeurs des variables de base.

Si $c_j$ est remplacé par $c_j + \Delta$, la sol$^{\underline{n}}$ demeure optimale tant que

$$c'^{t}_{R} - c'^{t}_{B} B^{-1} R \geq 0 \qquad \text{où } c' = c + \Delta\, e_j.$$

**$x_j$ est une variable hors-base :**

$$\Delta \geq c^{t}_{B} B^{-1} a_{.j} - c_j = - \underline{c}_j.$$

où $\underline{c}_j$ est la valeur du coût réduit avant de changer $c_j$.

$x_j$ est une variable de base :

$$c^t_R - (c_B + \Delta e_j)^t B^{-1} R \geq 0 \qquad \text{i.e. } \underline{c}^t_R - \Delta\,(j^{\underline{\text{ième}}} \text{ ligne de } B^{-1}R) \geq 0$$

où $\underline{c}_R$ est le vecteur de coût réduit avant de changer $c_j$.

Pour chaque colonne hors base k,

$$\max_k \left| \frac{\underline{c}_k}{\underline{a}_{jk}} : \underline{a}_{jk} < 0 \right| \leq \Delta \leq \min_k \left| \frac{\underline{c}_k}{\underline{a}_{jk}} : \underline{a}_{jk} > 0 \right|$$

où $\underline{a}_{jk}$ est l'élément en position (j, k) de $B^{-1}$ R.

## Exemple :

Reprenons notre exemple-type et étudions l'analyse de sensibilité de la sol$^{\underline{n}}$ optimale par rapport à l'élément $c_1$.

On sait que : $c^t_R - (c_B + \Delta\, e_j)^t B^{-1} R \geq 0$ i.e.

$$0 \leq (-1, 0, 0) - (-3, -3, 0) \begin{vmatrix} 1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 3/5 & -1/5 & 2/5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \Delta\ (1, 0, 0) \begin{vmatrix} 1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 3/5 & -1/5 & 2/5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

ou encore, $(-1, 0, 0) - (-12/5, -6/5, -3/5) - \Delta\ (1/5, 3/5, -1/5) \geq 0$.

Donc,

$$\begin{array}{lllllllll} -1 & + & 12/5 & - & 1/5\Delta & \geq & 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 7 \\ 0 & + & 6/5 & - & 3/5\Delta & \geq & 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 2 \\ 0 & + & 3/5 & + & 1/5\Delta & \geq & 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -3. \end{array}$$

$\therefore \quad \Delta_i = -3 \quad$ et $\Delta_s = 2$.

La solution reste optimale pour toute valeur de $c_1$ comprise entre -3 -3 et -3 + 2, c'est-à-dire -6 et -1. D'autre part, la valeur optimale de la fonction objectif varie entre -27/5 -3(1/5) et -27/5 +2(1/5).

# **Paramétrage**

Cela ne sera pas couvert dans ce cours.