Dualité

- Introduction à la dualité.
- Construction du couple primal-dual.
- Théorèmes de dualité.
- Écarts complémentaires.
- Algorithme dual du simplexe.
- Détermination d'une solution de base "duale-réalisable" de départ.
- Algorithme primal-dual du simplexe.

Introduction

- Un fermier veut nourrir ses animaux au moindre coût en respectant des contraintes sur les éléments nutritifs.

- Soient

x_j = nombre d'unités d'aliment de type j retenues,

c_j = coût d'une unité d'aliment de type j,

a_{ij} = quantité d'élément nutritif i dans une unité d'aliment de type j (naturel ou artificiel),

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m$$

seuil minimal d'élément nutritif i

la quantité d'élément nutritif i

Problème du consommateur :

$$\begin{cases} \text{Min } c^t x \\ \text{Sujet à } Ax \geq b \\ \qquad\quad x \geq 0 \end{cases}$$

- Par ailleurs, une compagnie fabrique des aliments artificiels que le fermier peut acheter.

- Chacun de ces aliments artificiels contient un élément nutritif à l'état pur.

- La compagnie veut déterminer les prix de ses aliments artificiels, donc de chaque élément nutritif :

  λ_i : prix d'une unité d'élément nutritif i,

  - en maximisant son profit potentiel

    $b^t\lambda$.

  - en demeurant compétitive avec les autres aliments,

    $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \leq c_j$$

Prix d'une unité d'aliment de type j.

Problème du consommateur

$$\textbf{(P)} \quad \begin{array}{l} \text{Min } c^t x \\ \text{Sujet à } Ax \geq b \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{array}$$

Problème du producteur

$$\textbf{(D)} \quad \begin{array}{l} \text{Max } b^t \lambda \\ \text{Sujet à } A^t \lambda \leq c \\ \qquad\qquad \lambda \geq 0. \end{array}$$

(D) est le dual de **(P)** et vice versa.

Nous verrons aussi qu'à l'optimum,

les 2 problèmes ont la même valeur de l'objectif.

De plus, en résolvant l'un, on résout automatiquement l'autre.

Construction du couple primal-dual

Contraintes d'inégalité :

Problème primal		Problème dual
Min $c^t x$		Max $b^t y$
sujet à $Ax \geq b$ $x \geq 0$	(4.2.1) (4.2.2)	sujet à $A^t y \leq c$ $y \geq 0$
où $c, x \in \mathbb{R}^n$,		et $b, y \in \mathbb{R}^m$,

et A est une matrice de dimension mxn.

Forme standard :

Min $c^t x$		Max $b^t y$
sujet à $Ax = b$ $x \geq 0$	(4.2.3) (4.2.4)	sujet à $A^t y \leq c$
où $c, x \in \mathbb{R}^n$,		et $b, y \in \mathbb{R}^m$,

et A est une matrice de dimension mxn.

De façon générale, à toute contrainte du primal correspond une variable du dual et à toute variable du primal correspond une contrainte du dual; ainsi,

à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ correspond y_i

à x_j correspond $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j$.

à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ correspond $y_i \geq 0$

à $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ correspond y_i quelconque

à $x_j \geq 0$ correspond $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j$

à x_j quelconque correspond $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$.

Problème de minimisation (primal)	Problème de maximisation (dual)
contrainte i $\leq$	variable y_i ≤ 0
contrainte i $\geq$	variable y_i ≥ 0
contrainte i $=$	variable y_i libre
variable x_j ≥ 0	contrainte j $\leq$
variable x_j ≤ 0	contrainte j $\geq$
variable x_j libre	contrainte j $=$
vecteur des coûts	terme constant
terme constant	vecteur des coûts

Théorèmes de dualité

<u>Théorème 4.3.1</u> (Théorème faible de dualité)

Si $x \in \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ et $y \in \{y: A^t y \leq c\}$, alors $b^t y \leq c^t x$.

<u>Démonstration</u>:

En effet, $b^t y = x^t A^t y \leq x^t c$ puisque $A^t y \leq c$ et que $x \geq 0$.

<u>Corollaire 4.3.1</u>

Si $x^* \in \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ et $y^* \in \{y: A^t y \leq c\}$, et si $b^t y^* = c^t x^*$, alors x^* et y^* sont des solutions optimales pour les problèmes (4.2.3) et (4.2.4) respectivement.

Théorème 4.3.2 (Théorème de dualité forte)

Si un des problèmes (4.2.3) ou (4.2.4) possède une solution optimale finie, il en est de même pour l'autre et les valeurs optimales respectives des objectifs de (4.2.3) et (4.2.4) sont égales.

Si un des problèmes (4.2.3) ou (4.2.4) n'est pas borné, alors l'ensemble des points réalisables pour l'autre problème est vide.

Remarque :

Par le biais de la preuve du théorème 4.3.2, on voit que le vecteur $\pi = {B^{-1}}^t c_B$ des multiplicateurs du simplexe, disponible lorsqu'on résout le primal, est solution optimale du dual (lorsque le primal est à l'optimum).

Exemple :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x -4y -3z \\ & 2x + 2y + z \leq 4 \\ & x + 2y + 2z \leq 6 \\ & x, y, z \geq 0. \end{array}$$

Après avoir introduit les variables d'écart, l'application de l'algorithme du simplexe donne successivement:

x	y	z	u	v	
2	**2**	1	1	0	4
1	2	2	0	1	6
-1	-4	-3	0	0	

x	y	z	u	v	
1	1	1/2	1/2	0	2
-1	0	**1**	-1	1	2
3	0	-1	2	0	-8

x	y	z	u	v	
3/2	1	0	1	-1/2	1
-1	0	1	-1	1	2
2	0	0	1	1	-10

La solution optimale pour ce problème est: x = 0, y = 1, z = 2.

Le problème dual s'écrit:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 4s + 6t \\ & 2s + t \leq -1 \\ & 2s + 2t \leq -4 \\ & s + 2t \leq -3 \\ & s, t \leq 0. \end{aligned}$$

Les valeurs optimales pour (s,t) se déduisent facilement à partir du tableau final ci-dessus:

$$\begin{vmatrix} s \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 \\ -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

		Primal		
		n'admet pas de solutions réalisables	fonction objectif non bornée	solution optimale finie
Dual	n'admet pas de solutions réalisables	peut arriver	théorème faible	théorème fondamental
	fonction objectif non bornée	théorème faible	théorème faible	théorème faible
	solution optimale finie	théorème fondamental	théorème faible	théorème fondamental

Si l'un des problèmes n'admet pas de solutions réalisables, on ne peut pas conclure que l'objectif de l'autre problème est non bornée.

Min $z = x - 2y$			Max $w = 2u + 3v$
sous	$x - y = 2$ $-x + y = 3$ $x, y \geq 0$	← **ensemble vide** →	$u - v \leq 1$ $-u + v \leq -2$ u, v libres.

Écarts complémentaires

Le théorème de dualité peut s'énoncer sous d'autres formes équivalentes à la précédente, et aidant à comprendre la structure des couples de programmes duaux optimaux.

L'importance de ces résultats deviendra apparent lorsque d'autres algorithmes seront proposés pour résoudre le problème (4.2.3).

<u>Théorème 4.5.1</u> (Théorème faible des écarts complémentaires)

Soit $x \in \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ et $y \in \{y: A^t y \leq c\}$.

x et y sont des solutions optimales pour (4.2.3) et (4.2.4) respectivement

si et seulement si

pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$

i) $x_j > 0 \Rightarrow a_{.j}{}^t y = c_j$

ii) $a_{.j}{}^t y < c_j \Rightarrow x_j = 0.$

Corollaire 4.5.1

Soit $x \in \{x:\ Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ et $y \in \{y:\ A^t y \leq c,\ y \geq 0\}$.

x et y sont des solutions optimales pour (4.2.1) et (4.2.2) respectivement

si et seulement si

pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$

i) $x_j > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{.j}^t y = c_j$

ii) $a_{.j}^t y < c_j \quad \Rightarrow \quad x_j = 0$

et pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$

iii) $y_i > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{i.} x = b_i$

iv) $a_{i.} x > b_i \quad \Rightarrow \quad y_i = 0.$

Définition 4.5.1

Étant donné un couple de problèmes duals, (4.2.1) et (4.2.2), on appelle lagrangien associé à ces problèmes la fonction des variables x et y

$$\mathbb{L}(x,y) \quad = \quad c^t x + b^t y - y^t A x.$$

Le couple de vecteurs $\underline{x} \geq 0$ et $\underline{y} \geq 0$ constitue par définition un col du lagrangien $\mathbb{L}(x,y)$ lorsque, pour tout couple de vecteurs $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a:

$$\mathbb{L}(\underline{x},y) \quad \leq \quad \mathbb{L}(\underline{x},\underline{y}) \quad \leq \quad \mathbb{L}(x,\underline{y})$$

■

Théorème 4.5.2 (Théorème du lagrangien)

Étant donné un couple de problèmes duals, une condition nécessaire et suffisante pour que les deux vecteurs $\underline{x} \geq 0$ et $\underline{y} \geq 0$ constituent des programmes duals optimaux est que $(\underline{x},\underline{y})$ soit un col du lagrangien $\mathbb{L}(x,y)$. La valeur commune des deux fonctions économiques à l'optimum est alors $\mathbb{L}(\underline{x},\underline{y})$.

Algorithme dual du simplexe

1^ière^ approche :

Remplacer la résolution du problème posé par celle de son dual.

Avantageux lorsque le problème posé comporte plus de contraintes que d'inconnues.

2^ième^ approche : Démarche duale

Partir d'une solution irréalisable satisfaisant aux critères d'optimalité, calculer une suite de solutions primales irréalisables vérifiant constamment ces critères et aboutissant éventuellement à une solution primale-réalisable laquelle sera optimale.

L'algorithme dual du simplexe s'applique au primal et non au dual.

Considérons le problème primal sous forme standard

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & c^t x & & \\ \text{sujet à} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0. \end{array}$$

Soit $x = [x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0]^t$ une solution de base du primal et dénotons $x_B = [x_1, x_2, ..., x_m]^t = B^{-1}b$ le vecteur des variables de base.

Supposons que les coûts relatifs pour cette base sont tous non négatifs:

$$\underline{c}_j = c_j - \pi^t a_{.j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., m$$
$$\underline{c}_j = c_j - \pi^t a_{.j} > 0, \qquad j = m+1, m+2, ..., n.$$

Les multiplicateurs du simplexe associés à cette base constituent une solution réalisable pour le dual $A^t\pi \leq c$.

x_B est appelé solution «duale-réalisable» de base. Si cette solution de base est aussi réalisable (c'est-à-dire «primale-réalisable»: $x_B = B^{-1}b \geq 0$), c'est une solution optimale de base du primal.

L'algorithme dual du simplexe part d'une solution de base «duale-réalisable» mais irréalisable pour le primal, et fait décroître, de façon itérative, le # des variables négatives tout en maintenant à chaque itération les critères d'optimalité.

Si $x_k < 0$ et les coûts relatifs non négatifs, alors il existe une solution réalisable $y = \pi - \varepsilon\beta^t_{k.}$ pour le problème dual telle que $b^t y > b^t \pi$ où $\beta_{k.}$ est la $k^{\underline{\text{ième}}}$ ligne de B^{-1}.

Preuve :

(i) $b^t y = b^t \pi - \varepsilon\beta_{k.} b = b^t \pi - \varepsilon x_k > b^t \pi$, pour tout $\varepsilon > 0$.

(ii) Pour que y soit réalisable pour le dual, il faut que $c_j - y^t a_{.j} \geq 0 \;\forall j = 1, 2, \ldots, n$ i.e.

$$c_j - \pi^t a_{.j} + \varepsilon\beta_{k.} a_{.j} \geq 0 \;\forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\text{Or, } c_j - \pi^t a_{.j} + \varepsilon\beta_{k.} a_{.j} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq m;\, j \neq k \\ \varepsilon & \text{si } j = k \\ c_j - \pi^t a_{.j} + \varepsilon \underline{a}_{kj} & \text{si } m < j \leq n. \end{cases}$$

Il s'ensuit que y est réalisable pour le dual si :

$$c_j - \pi^t a_{.j} + \varepsilon \underline{a}_{kj} \geq 0 \qquad \text{si } m < j \leq n \qquad \text{avec } \varepsilon > 0.$$

Si $\underline{a}_{kj} \geq 0$ pour tout j, $m < j \leq n$

alors y est une solution réalisable pour le dual $\forall \varepsilon > 0$,

par conséquent, le dual n'est pas borné supérieurement et l'ensemble réalisable du primal est vide

sinon la plus grande valeur de $\varepsilon > 0$ est :

$$\underline{\varepsilon} = \min_{\substack{m < j \leq n \\ \underline{a}_{kj} < 0}} \frac{c_j - \pi^t a_{.j}}{- \underline{a}_{kj}} = \frac{c_s - \pi^t a_{.s}}{- \underline{a}_{ks}} = \frac{- \underline{c}_s}{\underline{a}_{ks}}$$

BREF,

Ce choix de y nous donne une solution réalisable pour le dual, améliorant la fonction objective du dual, satisfaisant les critères d'optimalité du primal et réduisant le nombre de variables de base négatives.

Énoncé de l'algorithme dual du simplexe

Initialisation

Déterminons une solution de base où $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ sont les variables de base telle que $\underline{c}_j \geq 0$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$.

Étape 1.

Si $x_{j_i} \geq 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$ alors la solution de base est réalisable et optimale et l'algorithme se termine.

S'il existe au moins un indice i tel que $x_{j_i} < 0$, on procède à l'étape 2.

Étape 2. **Critère de sortie**

Déterminons l'indice r tel que

$$x_{j_r} = \text{Min}\ \{x_{j_i} : x_{j_i} < 0, i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Étape 3. Critère d'entrée

Si $\underline{a}_{rj} \geq 0$ pour tout $j = 1, 2, ..., n$ alors $\{x: Ax = b, x \geq 0\}$ est vide et l'algorithme se termine.

S'il existe au moins un indice j tel que $\underline{a}_{rj} < 0$, alors déterminons l'indice s tel que

$$\underline{c}_r / -\underline{a}_{rs} = \min_{1 \leq j \leq n} \{\underline{c}_j / -\underline{a}_{rj} : \underline{a}_{rj} < 0\}.$$

Étape 4.

Un pivot est effectué sur l'élément $\underline{a}_{rs}$ afin de déterminer une nouvelle forme canonique avec laquelle l'étape 1 est répétée.

Remarque :

Cette méthode est particulièrement utilisée dans le contexte où après avoir déterminé une solution optimale d'un problème PL, on modifie le membre de droite et on veut connaître une solution optimale (s'il en existe une) du problème perturbé.

Exemple 4.6.1

Utiliser l'algorithme dual du simplexe pour résoudre le problème suivant:

$$\text{Min} \quad z = 4x_1 + x_2 + x_3$$

sujet à

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$8x_1 - x_2 - 9x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Après avoir introduit les variables d'écart x_4 et x_5, la forme canonique où x_4 et x_5 sont les variables de base est formulée comme suit:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
-1	**-1**	0	1	0	0	-8
-8	1	9	0	1	0	-1
4	1	1	0	0	1	0

Le critère de sortie appliqué à cette forme canonique indique que x_4 est la variable de sortie, tandis que x_2 est la variable d'entrée.

Par conséquent, le pivot sur l'élément à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne du tableau précédent engendre la forme canonique suivante où les variables de base sont x_2 et x_5.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
1	1	0	-1	0	0	8
-9	0	9	1	1	0	-9
3	0	1	1	0	1	-8

La variable de sortie est donc x_5 et la variable d'entrée est x_1.

Le pivot sur l'élément à l'intersection de la deuxième ligne et de la première colonne engendre la forme canonique suivante où les variables de base sont x_1 et x_2.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
0	1	1	-8/9	+1/9	0	7
1	0	-1	-1/9	-1/9	0	1
0	0	4	4/3	1/3	1	-11

La solution optimale est donc $x_1 = 1$, $x_2 = 7$ et $x_3 = 0$ et la valeur optimale est égale à 11.

■

Exemple 4.6.2

Utiliser l'algorithme dual du simplexe pour résoudre le problème suivant:

$$\text{Min} \quad z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sujet à
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

On ajoute des variables de surplus et on affecte un changement de signes:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
-1	-2	-3	1	0	0	-5
-2	-2	-1	0	1	0	-6
3	4	5	0	0	1	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
0	**-1**	-5/2	1	-1/2	0	-2
1	1	1/2	0	-1/2	0	3
0	1	7/2	0	3/2	1	9

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	
0	1	5/2	-1	1/2	0	2
1	0	-2	1	-1	0	1
0	0	1	1	1	1	11

Solution optimale: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 0$.

■

Exemple 4.6.3

Voyons un autre exemple d'application de cet algorithme.

$$\text{Min} \quad w = x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujet à

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 50 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 15 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	$-w$	
1	1	1	1	0	0	0	50
-1	**-2**	0	0	1	0	0	-15
-1	1	-2	0	0	1	0	-10
+1	+1	+2	0	0	0	1	0

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	-w	
.5	0	1	1	.5	0	0	42.5
.5	1	0	0	-.5	0	0	7.5
-1.5	0	-2	0	.5	1	0	-17.5
+.5	0	+2	0	+.5	0	1	- 7.5

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	-w	
0	0	1/3	1	2/3	1/3	0	110/3
0	1	-2/3	0	-1/3	1/3	0	5/3
1	0	4/3	0	-1/3	-2/3	0	35/3
0	0	+4/3	0	+1/3	+1/3	1	- 40/3

Donc la solution optimale est:

$x_1 = 35/3$, $x_2 = 5/3$ et $x_3 = 0$, $w_{min} = 40/3$.

Détermination d'une solution de base "duale-réalisable" de départ.

Très souvent, on applique l'algorithme dual du simplexe parce que les conditions initiales requises pour cette application sont réalisées ($\underline{c}_j \geq 0$).

C'est le cas, en particulier, dans certains problèmes paramétriques et de post-optimisation.

Il peut cependant exister d'autres circonstances dans lesquelles on désire utiliser l'algorithme dual alors qu'on ne connaît pas a priori de solution de base «duale-réalisable».

Procédure :

Soit une base B du primal, construisons le tableau du simplexe relatif à cette base B.

Le système explicité et la forme à minimiser s'écrivent:

$$x_L + \sum_{j \varepsilon J} \underline{a}_{Lj} x_j = \underline{x}_L, \quad L \varepsilon I$$

$$\sum_{j \varepsilon J} \underline{c}_j x_j - z = -\underline{z}.$$

- Ajoutons à ce système la (m+1) $\underline{\text{ième}}$ contrainte $\sum_{j \varepsilon J} x_j \leq M$,

où M est un nombre positif aussi grand que l'on voudra, c'est-à-dire supérieur à tout nombre fini auquel il sera comparé dans les calculs.

- Cette «contrainte artificielle» est transformée en équation par addition de la variable d'écart x_0, non négative et affectée d'un coût nul dans la forme à minimiser, soit

$$x_0 + \sum_{j \varepsilon J} x_j = M, \; x_0 \geq 0. \qquad (4.7.2)$$

- L'ensemble des valeurs

$$x_L = \underline{x}_L, \qquad L \varepsilon I$$

$$x_0 = M$$

constitue une solution de base du problème augmenté (à m + 1 contraintes).

- Effectuons maintenant un changement de base en prenant comme pivot le coefficient (1) de la variable x_k dans (4.7.2),

  k étant défini par $\underline{c}_k = \min \{\underline{c}_j : j \varepsilon J\}$.

- Ceci revient à remplacer dans les contraintes (4.7.1), x_k

  par $M - x_0 - \sum_{j \varepsilon J \setminus \{k\}} x_j$.

- Après pivotage, on a:

$$\underline{c}'_j = \underline{c}_j - \underline{c}_k \geq 0, \qquad j \varepsilon J \setminus \{k\}$$

$$\underline{c}'_0 = 0 - \underline{c}_k \geq 0, \qquad \text{le coût relatif associé à } x_0.$$

On peut donc appliquer l'algorithme dual du simplexe.

Note : Cette procédure n'est pas utile lorsqu'une variable d'écart ou de surplus a dû être ajoutée à chaque contrainte du primal et que $c \geq 0$.

L'application de l'algorithme dual au problème augmenté conduit à l'un des 3 cas suivants :

1

1^e cas: Le problème augmenté n'a pas de solution réalisable

Il en est de même du problème original.

$2^{ième}$ cas: Le problème augmenté a une solution optimale et x_0 est une variable de base.

Nous avons une solution optimale pour le problème original.

$3^{ième}$ cas: Le problème augmenté a une solution optimale et x_0 n'est pas une variable de base.

Les variables de base dépendent de M et le problème original n'a en général pas de solution optimale finie.

Note : Dès que x_0 entre dans la base, nous avons une solution de base duale-réalisable du primal, on peut supprimer la ligne relative à x_0 et continuer l'application de l'algorithme dual.

Algorithme primal-dual du simplexe

Principe de la méthode :

- consiste à travailler simultanément sur les problèmes primal et dual;

- partant du dual et d'une solution irréalisable du primal, choisie de façon que le théorème des écarts complémentaires soit satisfait, cette méthode «améliore» de façon itérative la solution du primal;

- lorsque celle-ci devient primale-réalisable, la solution est optimale.

Étapes de l’algorithme :

a) déterminer une solution duale-réalisable;

b) associer à cette solution duale-réalisable un problème primal restreint déduit du primal original en y annulant certaines variables, de façon à satisfaire au théorème faible des écarts complémentaires et en remplaçant la forme linéaire primitive par la somme des variables artificielles;

c) résoudre le primal restreint, c'est-à-dire minimiser la somme des variables artificielles; cette minimisation requiert en général l'application de l'algorithme du simplexe;

d) si la solution optimale du primal restreint n'est pas une solution réalisable du problème primal, on peut déterminer une nouvelle solution duale-réalisable, et on réapplique l'algorithme à partir de b).

Après un nombre fini d'itérations, la solution optimale du primal restreint est une solution réalisable (donc optimale) du primal ou bien on met en évidence l'absence de solutions réalisables ou l'absence d'optimum fini pour le primal.

- Considérons donc le problème de programmation linéaire sous sa forme standard:

$$\begin{array}{ll} & \text{Min} \quad c^t x \\ \text{sujet à} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{4.8.1}$$

et son problème dual

$$\begin{array}{ll} & \text{Max} \quad b^t y \\ \text{sujet à} & A^t y \leq c. \end{array} \tag{4.8.2}$$

- Supposons que $y \in \{y: A^t y \leq c\}$. Définissons $\Gamma \subset \{1, 2, ..., n\}$ comme suit:

$$\Gamma = \{j: y^t a_{.j} = c_j\}.$$

- Ainsi, puisque y est une solution duale-réalisable, $y^t a_{.j} < c_j$ pour tout $j \notin \Gamma$, associons au sous-ensemble Γ le problème primal restreint suivant:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & e^t z & \\
\text{sujet à} & Ax + Iz = b & (4.8.3) \\
& x \geq 0, \quad x_j = 0 \quad \text{si } j \notin \Gamma & \\
& z \geq 0 &
\end{array}
$$

où $e = [1, 1, ..., 1]^t \in \Re^m$.

- Le problème dual de ce primal restreint s'écrit alors:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & b^t u & \\
\text{sujet à} & u^t a_{.j} \leq 0, \quad \text{pour tout } j \in \Gamma & (4.8.4) \\
& u \leq e. &
\end{array}
$$

Énoncé de l'algorithme primal-dual du simplexe

Initialisation.

Déterminons un point réalisable du problème dual (4.8.2).

Étape 1.

Déterminons l'ensemble Γ associé au point réalisable du problème dual (4.8.2) et le problème primal restreint associé à Γ.

Étape 2.

Utilisons l'algorithme du simplexe pour résoudre le problème primal restreint (4.8.3).

Si la valeur optimale de l'objectif de (4.8.3) est égale à 0, alors les valeurs que prennent les variables x_j dans cette solution constituent une solution optimale du problème primal (4.8.1). L'algorithme se termine.

Autrement, on procède à l'étape 3.

Étape 3.

Déterminons une solution optimale u du problème dual restreint (4.8.4) en utilisant les multiplicateurs du simplexe associés à la base optimale de (4.8.3).

Si $u^t a_{.j} \leq 0$ pour tout j = 1, 2, ..., n **(1e cas)**

alors le problème primal (4.8.1) ne comporte pas de point réalisable et l'algorithme se termine.

S'il existe au moins un indice j tel que $u^t a_{.j} > 0$ **(2ième cas)**

alors définissons un nouveau point réalisable $y + \underline{\varepsilon}u$ du problème dual (4.8.2).

On répète l'étape 1 avec ce nouveau point réalisable $y + \underline{\varepsilon}u$. ∎

Dans le but de déterminer un nouveau point réalisable du problème dual (4.8.2), considérons le vecteur $y + \varepsilon u$:

1e cas : $u^t a_{.j} \leq 0$ pour tout $j = 1, 2, ..., n$

Le point $y + \varepsilon u$ est un point réalisable du problème dual (4.8.2) pour toute valeur de $\varepsilon \geq 0$.

Si on évalue l'objectif de (4.8.2), on obtient:

$$b^t(y + \varepsilon u) = b^t y + \varepsilon b^t u \to \infty \text{ lorsque } \varepsilon \to \infty.$$

Par conséquent, le problème dual (4.8.2) n'est pas borné supérieurement; d'où, le problème primal (4.8.1) n'a pas de point réalisable.

===================

$2^{\text{ième}}$ cas : $\exists$ j tel que $u^t a_{.j} > 0$

Puisque u est un point réalisable du problème dual restreint (4.8.4), alors

$$u^t a_{.j} \le 0, \quad j \in \Gamma.$$

Par conséquent, $(y + \varepsilon u)^t a_{.j} \le c_j$ pour tout $j \in \Gamma$.

Pour que $y + \varepsilon u$ soit un point réalisable du problème dual (4.8.2), il est donc nécessaire que

$$(y + \varepsilon u)^t a_{.j} = y^t a_{.j} + \varepsilon u^t a_{.j} \le c_j \text{ pour tout } j \notin \Gamma.$$

Par conséquent, la plus grande valeur $\underline{\varepsilon}$ que peut prendre ε pour que $y + \varepsilon u$ soit un point réalisable de (4.8.2) est donnée par la relation suivante:

$$\underline{\varepsilon} = \min_{1 \le j \le n} \{(c_j - y^t a_{.j}) / (u^t a_{.j}): \quad u^t a_{.j} > 0\} = (c_k - y^t a_{.k}) / (u^t a_{.k}).$$

Dans ce cas, on entreprend une nouvelle itération de la méthode avec $y + \underline{\varepsilon} u$.

Il importe de noter que la valeur de l'objectif du problème dual (4.8.2) a augmenté puisque

$$b^t(y + \underline{\varepsilon}u) \quad = \quad b^ty + \underline{\varepsilon}b^tu > b^ty$$

étant donné que $b^tu > 0$ et $\underline{\varepsilon} > 0$.

Théorème 4.8.1

Soit $y \in \{y: A^ty \leq c\}$, supposons que x et z constituent un point réalisable pour le primal restreint où $z = 0$. Alors x et y sont des solutions optimales pour (4.8.1) et (4.8.2) respectivement.

EXEMPLE

Utiliser l'algorithme primal-dual pour résoudre le problème suivant:

$$\begin{aligned}
\text{Min } z = \; & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sujet à } \; & x_1 + x_2 \geq 8 \\
& 8x_1 - x_2 - 9x_3 \geq 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Après avoir introduit les variables de surplus x_4 et x_5, le problème devient:

$$\begin{aligned}
\text{Min } z = \; & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sujet à } \; & x_1 + x_2 - x_4 = 8 \\
& 8x_1 - x_2 - 9x_3 - x_5 = 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0. \\
& x_4 \geq 0. \\
& x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Notons que $y = (0, 0.5)^t$ est un point réalisable pour le dual de ce problème:

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Max } 8y_1 + y_2 & & & \\
\text{sujet à} & y_1 + 8y_2 & \leq & 4 \\
& y_1 - y_2 & \leq & 1 \\
& \quad - 9y_2 & \leq & 1 \\
& y_1 , y_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Alors $\Gamma = \{1,4\}$, et le primal restreint associé est:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Min } \tau = & z_1 + z_2 & & & & & \\
\text{sujet à} & x_1 & -x_4 + & z_1 & & = 8 \\
& 8x_1 & & & + z_2 & = 1 \\
& x_1 \geq 0 & & & & \\
& & x_4 \geq 0 & & & \\
& & & z_1 \geq 0 & & \\
& & & & z_2 \geq 0. &
\end{array}
$$

Une solution optimale de ce problème est $z_1 = 7\ 7/8$, $x_1 = 1/8$, $x_4 = z_2 = 0$:

x_1	x_4	z_1	z_2	$-\tau$	
0	-1	1	-1/8	0	7 7/8
1	0	0	1/8	0	1/8
0	1	0	9/8	1	-7 7/8.

Une solution optimale pour le dual de ce problème est:

$$u = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1/8 & 1/8 \end{vmatrix}}_{{B^{-1}}^{t}} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}}_{c_B} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1/8 \end{vmatrix}$$

Puisque $u^t a_{.2} = (1 \quad -1/8)\,(1 \quad -1)^t = 1\ 1/8 > 0$, on poursuit l'algorithme pour déterminer $y + \underline{\varepsilon} u$, un nouveau point réalisable du dual du problème original: $\min_{1 \le j \le m} \{(c_j - y^t a_{.j}) / (u^t a_{.j}) : u^t a_{.j} > 0\}$

$$\underline{\varepsilon} = \text{Min}\ \{(1 + 1/2) / (9/8),\ (1 + 9/2) / (9/8),\ (0 + 1/2) / (1/8)\} = 4/3$$

$$= (c_2 - y^t a_{.2}) / (u^t a_{.2}).$$

Ainsi, $y + \underline{\varepsilon} u = (4/3,\ 1/3)^t$ et $\Gamma = \{1,2\}$.

Le primal restreint associé est

$$\begin{array}{llcl}
\text{Min } \tau = & z_1 + z_2 & & \\
\text{sujet à} & x_1 + x_2 + z_1 & & = 8 \\
 & 8x_1 - x_2 & + z_2 & = 1 \\
 & x_1 \ge 0 & & \\
 & x_2 \ge 0 & & \\
 & z_1 \ge 0 & & \\
 & z_2 \ge 0. & &
\end{array}$$

■ En réutilisant le tableau précédent comme suit:

x_1	x_2	z_1	z_2	$-\tau$	
0	**9/8**	1	-1/8	0	7 7/8
1	-1/8	0	1/8	0	1/8
0	-9/8	0	9/8	1	-7 7/8.
	↑				

$$\underline{a}_{.2} = B^{-1}a_{.2} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 \\ -1/8 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	z_1	z_2	$-\tau$	
0	1	8/9	-1/9	0	7
1	0	1/9	1/9	0	1
0	0	1	1	1	0.

on a comme solution optimale de ce problème $x_1 = 1$, $x_2 = 7$.

Puisque $\tau = 0$, il en découle que $x_1 = 1$, $x_2 = 7$ et $x_3 = 0$ est une solution optimale du problème original.

$$\underline{c}_{x_2} = c_{x_2} - c_B{}^t\, B^{-1}\, a_{.2} = 0 - (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & -1/8 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -9/8.$$