Courbes de Hermite

Michael E. Mortenson, Geometric Modeling. Wiley, 1997, 523p.

Courbes de Hermite

- Chaque courbe est définie par un ensemble de points dont les coordonnées sont données par des fonctions paramétriques univariées continues de la forme:

$$P(u) = \begin{pmatrix} P_x(u) \\ P_y(u) \\ P_z(u) \end{pmatrix} \qquad u \in [0, 1]$$

- Le vecteur tangent à la courbe est donné par la différentiation de P(u):

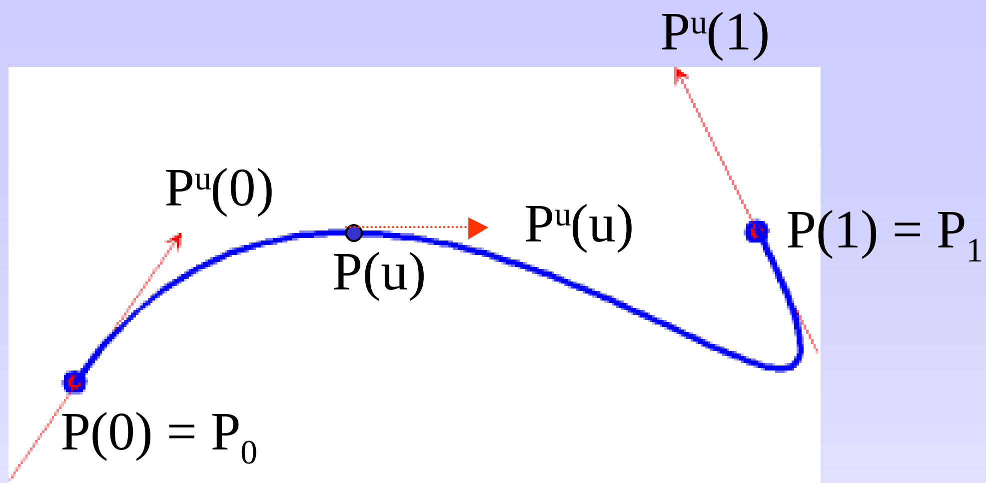
$$P^u(u) = \frac{dP(u)}{du} = \begin{pmatrix} dP_x(u) / du \\ dP_y(u) / du \\ dP_z(u) / du \end{pmatrix}$$

- Les extrémités de la courbe sont P_0 et P_1.

- Les vecteurs $P_0 = P(0)$, $P_1 = P(1)$, $P^u(0) = \left.\frac{dP(u)}{du}\right|_{u=0}$ et $P^u(1) = \left.\frac{dP(u)}{du}\right|_{u=1}$

définissent exactement une courbe de cette famille.

Courbes de Hermite



La forme algébrique d'une courbe de Hermite est donnée par 3 polynômes de degré 3:

$$
\begin{aligned}
P_x(u) &= a_{3x}u^3 + a_{2x}u^2 + a_{1x}u + a_{0x} \\
P_y(u) &= a_{3y}u^3 + a_{2y}u^2 + a_{1y}u + a_{0y} \\
P_z(u) &= a_{3z}u^3 + a_{2z}u^2 + a_{1z}u + a_{0z}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

où u est une variable réelle appartenant à [0,1].

Courbes de Hermite

- Les 12 coefficients algébriques déterminent une courbe unique.

- L'expression algébrique peut s'écrire sous une forme vectorielle plus compacte:

$$P(u) = A_3u^3 + A_2u^2 + A_1u + A_0 \qquad (2)$$

et les composantes $P_x(u)$, $P_y(u)$ et $P_z(u)$ de $P(u)$ correspondent aux coordonnées cartésiennes du point P.

- Mais la forme la plus expressive des caractéristiques de courbure et de position donnant plus de contrôle intuitif à l'animateur graphique reste la formulation géométrique.

- Avec les 2 points $P_0 = P(0)$ et $P_1 = P(1)$ ainsi que les tangentes en ces points, on obtient 4 équations:

$$\begin{cases} P(0) = A_0 \\ P(1) = A_3 + A_2 + A_1 + A_0 \\ P^u(0) = A_1 \\ P^u(1) = 3A_3 + 2A_2 + A_1 \end{cases}$$

Courbes de Hermite

- La résolution de ce système à 4 inconnus donne :

$$\begin{cases} A_0 = & P_0 \\ A_1 = & P^u(0) \\ A_2 = & -3\ P_0 + 3\ P_1 - 2\ P^u(0) - P^u(1) \\ A_3 = & 2\ P_0 - 2\ P_1 + P^u(0) + P^u(1) \end{cases}$$

En substituant les A_i dans la formule algébrique, on a:

$$P(u) = (2u^3 - 3u^2 + 1)\ P_0 + (-2u^3 + 3u^2)\ P_1 + (u^3 - 2u^2 + u)\ P^u(0) + (u^3 - u^2)\ P^u(1)$$

BREF

$$P(u) = A\ U = [A_3\ A_2\ A_1\ A_0] \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme algébrique

Forme géométrique

$$P(u) = B\ M\ U \quad \text{où } B = [P_0\ P_1\ P^u(0)\ P^u(1)] \text{ et} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = B\ M \text{ ou } B = A\ M^{-1}}$$

Tangente à la courbe de Hermite

- $P^u(u) = (6u^2 - 6u)\, P_0 + (-6u^2 + 6u)\, P_1 + (3u^2 - 4u + 1)\, P^u(0) + (3u^2 - 2u\,)\, P^u(1)$

$P^u(u) = B\, M^u\, U$ où $B = [P_0\; P_1\; P^u(0)\; P^u(1)]$ et

$$M^u = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Troisième formulation d'une courbe de Hermite

- Elle est définie à l'aide de 4 points quelconques appartenant à la courbe : P_1, P_2, P_3, P_4 et u_1, u_2, u_3 et u_4 les valeurs des paramètres associées aux 4 points.

  Pour déterminer la matrice de coefficients géométriques B, nous savons que :

  $$[P_1, P_2, P_3, P_4] = [P(u_1), P(u_2), P(u_3), P(u_4)] = B\,M \begin{pmatrix} u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 & u_4^3 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $B = [P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ ][U_1\ U_2\ U_3\ U_4\ ]^{-1}\ M^{-1}$

$\Rightarrow$ $A = B\ M$

Quatrième formulation d'une courbe de Hermite

- Elle est définie à l'aide des 2 extrémités de la courbe P_0 et P_1 , les vecteurs tangents unitaires t_0 et t_1, ainsi qu'un point intermédiaire P_i.

Note : Le paramètre u_i associé à P_i est inconnu.

- Il s'agit de calculer les vecteurs tangents aux extrémités :

Posons $P^u(0) = k_0 t_0$ et $P^u(1) = k_1 t_1$.

Trouver k_0 et k_1 de telle sorte que la courbe passe par le point intermédiaire P_i :

$$P_i = [P_0 \; P_1 \; k_0 t_0 \; k_1 t_1] \, M \begin{pmatrix} u_i^3 \\ u_i^2 \\ u_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

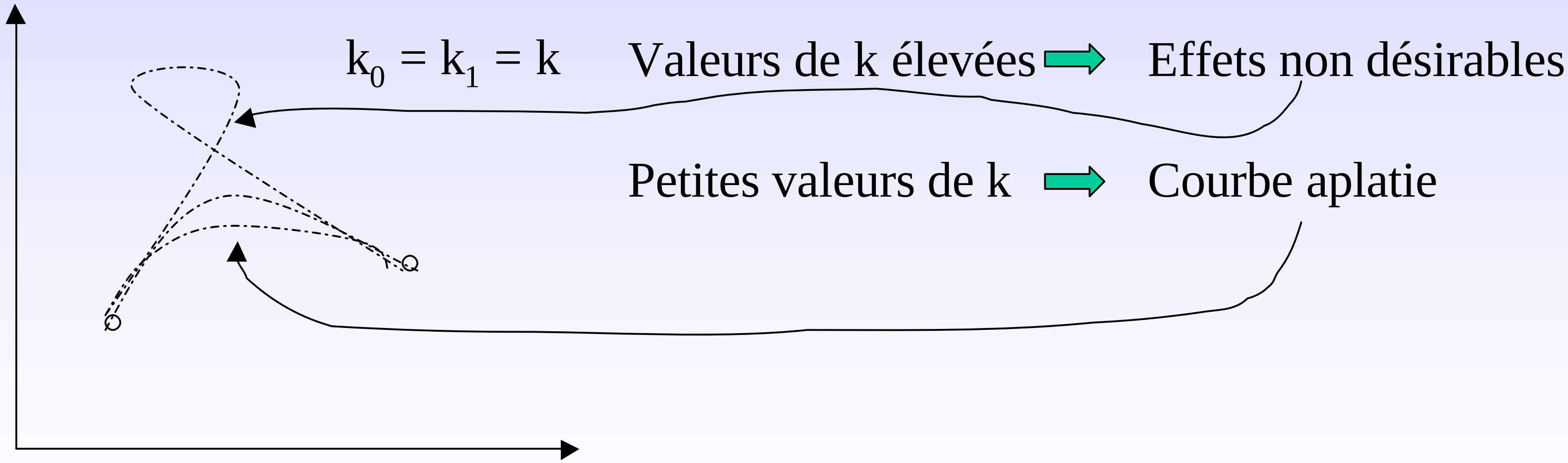
3 équations
à
3 inconnus (k_0, k_1, u_i)

Propriétés des courbes de Hermite

- Ils possèdent une formulation mathématique et une interprétation géométrique.
- Variation de la norme de chaque vecteur tangent :

Ex. : $B = [P_0\ P_1\ k_0 t_0\ k_1 t_1] \longrightarrow$ **2 degrés de liberté**

En faisant varier k_0 et k_1, cela permet de tracer une famille infinie de courbes entre les extrémités P_0 et P_1 ayant différentes courbures.

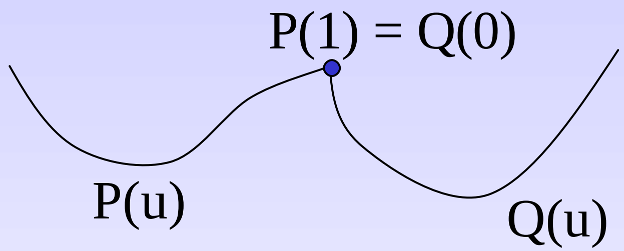


Propriétés des courbes de Hermite

- Contraintes de continuité

Nous pouvons définir les conditions de continuité à des points de jonction.

- La continuité d'ordre 0 nous assure seulement que le point de jonction est commun aux 2 courbes P et Q.



- La continuité d'ordre 1 exige en plus que la direction du vecteur tangent au point de jonction reste fixe :

$$P(1) = Q(0)$$
$$P^u(1) = k_0 Q^u(0)$$

Propriétés des courbes de Hermite

- Définir une courbe intermédiaire Q entre 2 courbes P et R pour former une courbe composée P Q R.

  Étant donné $B_P = [\ P(0), P(1), P^u(0), P^u(1)]$ et
  $B_R = [\ R(0), R(1), R^u(0), R^u(1)]$, il s'agit de trouver B_Q.

  En imposant la continuité d'ordre 1 aux 2 points de jonction, B_Q est de la forme :

$$B_Q = [\ P(1), R(0), a\ P^u(1) / |\ P^u(1)\ |, b\ R^u(0) / |\ R^u(0)\ |].$$

Propriétés des courbes de Hermite

- Changement d'espace paramétrique

  Cela consiste à changer la plage des valeurs que peut prendre la variable paramétrique d'une courbe de Hermite, tout en conservant leur forme originelle.

  Ceci peut se traduire par un changement d'échelle ou
  un changement du sens de parcours de la variable paramétrique sur l'objet.

Soit $v = f(u)$ décrivant le changement apporté à l'intervalle paramétrique,

A. Inverser la direction de parcours de la courbe ($v = 1 - u$).

Soient 2 courbes P et Q dont les matrices de coefficients géométriques sont:

$B_P = [\, P(0), P(1), P^u(0), P^u(1)]$ et $B_Q = [\, Q(0), Q(1), Q^u(0), Q^u(1)]$,

si $Q(0) = P(1)$, $Q(1) = P(0)$,
$Q^u(0) = - P^u(1)$, $Q^u(1) = - P^u(0)$,

alors les courbes sont identiques sauf le sens de parcours a changé.

Propriétés des courbes de Hermite

B. Cas général.

Intervalle avant changement: $[u_i, u_j]$

Intervalle après changement: $[v_i, v_j]$

Soient 2 courbes P(u) et Q(v) dont les matrices de coefficients géométriques sont:

$B_P = [\ P(u_i), P(u_j), P^u(u_i), P^u(u_j)]$ et

$B_Q = [\ Q(v_i), Q(v_j), Q^v(v_i), Q^v(v_j)]$,

alors l'invariance de la position de la courbe entraîne les égalités suivantes:

$$Q(v_i) = P(u_i) \text{ et } Q(v_j) = P(u_j)$$

et l'invariance de la forme nous amène à choisir une relation linéaire $v = au + b$ afin de préserver la forme cubique de la courbe et la direction des vecteurs tangents.

Puisque $dv = a\,du$, et $v_i = a\,u_i + b$, $v_j = a\,u_j + b$,

on obtient:
$$\begin{cases} Q^v(v) = Q^u(u) / a = P^u(u) / a = [(u_j - u_i) / (v_j - v_i)]\ P^u(u) \\ Q^v(v_i) = [(u_j - u_i) / (v_j - v_i)]\ P^u(u_i) \\ Q^v(v_j) = [(u_j - u_i) / (v_j - v_i)]\ P^u(u_j). \end{cases}$$

Propriétés des courbes de Hermite

- Subdivision exacte d'une courbe de Hermite en segments de courbes de Hermite

  Considérons en particulier la troncation d'une courbe à u_i et u_j.

  Il s'agit de calculer $P(u_i)$ et $P(u_j)$ à partir de $P = B\ M\ U$

  $P^u(u_i)$ et $P^u(u_j)$ à partir de $P^u = B\ M^u\ U$.

  On obtient alors :

$$
\begin{cases}
Q(0) = P(u_i) \\
Q(1) = P(u_j) \\
Q^v(0) = (u_j - u_i)\ P^u(u_i) \\
Q^v(1) = (u_j - u_i)\ P^u(u_j)
\end{cases}
$$

Courbes de Hermite particulières

- Courbes particulières

Segment de droite d'extrémités P_0 et P_1:

$$B = [\; P_0 \quad P_1 \qquad a(P_1 - P_0) \qquad b(P_1 - P_0)]$$

et $\quad P(u) = P_0 + [(a+b-2)\, u^3 - (2a + b - 3)\, u^2 + au]\,(P_1 - P_0).$

La distribution des valeurs de u sur le segment de droite n'est pas uniforme à moins que $a = b = 1$.

Courbe conique d'extrémité P_0 et P_1, définie par un point intermédiaire P_2 et de paramètre ρ

$$B = [\; P_0 \quad P_1 \qquad 4\rho(P_2 - P_0) \qquad 4\rho(P_1 - P_2)]$$

où $\quad P_2$ est le point d'intersection des droites tangentes en P_0 et P_1,

$\rho < 0.5 \;\rightarrow\;$ une ellipse
$\rho = 0.5 \;\rightarrow\;$ une parabole
$\rho > 0.5 \;\rightarrow\;$ une hyperbole

Courbes de Hermite particulières

- Courbes particulières (suite)

Courbe de Bézier cubique où P_0, P_1, P_2 et P_3 sont les points de contrôle, P_0 et P_3 sont les extrémités de la courbe.

$$B = [\ P_0 \ \ P_3 \qquad 3(P_1 - P_0) \qquad 3(P_3 - P_2)].$$

FIN