CHAPITRE V

Modélisation géométrique de base

Modélisation géométrique de base

- Certains objets peuvent être représentés exactement grâce à quelques paramètres ou points.

    ➡ Le rayon et le centre d'un cercle sont suffisants pour le représenter formellement.

- Par contre, un objet tel qu'une pomme ou un visage humain ne peut être représenté aussi simplement.

- Il existe différentes techniques permettant de modéliser une figure complexe :

Les techniques d'ajustement (rarement applicable en infographie)

Faire passer une courbe, une surface ou un volume non nécessairement par les points donnés, mais en minimisant les écarts entre l'objet et ces points.

Exemple : Recherche d'une courbe C(u)

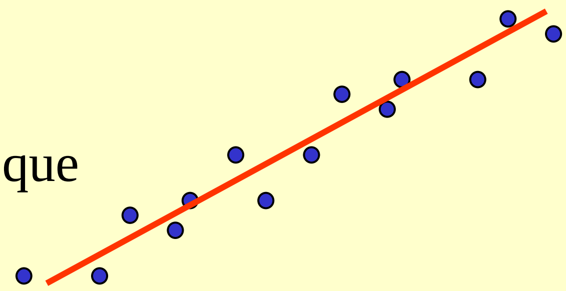
$$\min_{a,\, b,\, c,\, \ldots} \sum_{i = 0, 1, 2, \ldots, n-1} \min_{u \in [0, 1]} (C(u) - P_i) * (C(u) - P_i)$$

où a, b, c, … sont les coefficients de C(u).

Problème d'optimisation difficile à résoudre.

Modélisation géométrique de base

Exemple :



Soit la droite y = m x + b,
il s'agit de déterminer m et b de telle façon que l'on minimise la distance entre cette droite et l'ensemble des points.

Les méthodes d'interpolation

Trouver une courbe, une surface ou un volume qui passe par un ensemble de points donnés.

Les techniques de points de contrôle

Calculer des courbes, des surfaces ou des volumes qui respectent la forme générale de la figure originale, en lui donnant un côté esthétique, mais en ne passant que par les extrémités de la figure originale.
Ex. : Formes de Bézier, B-splines.

TECHNIQUES D'INTERPOLATION

- Choisir une famille de courbes, de surfaces ou de volumes et sélectionner un objet de cette famille en exigeant que cet objet passe par chacun des points fournis.
- Faciles à résoudre mathématiquement mais donnent des résultats moins réalistes.

Détermination d'une courbe d'interpolation

- **Première solution** : utilisation de polynômes

Interpolation polynomiale

Soit (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) une suite de n points dans le plan avec $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$.
On obtient facilement la formule d'un polynôme d'interpolation de degré n - 1:

$$p_n(x) = \sum_{i=1,2,\ldots,n} y_i \prod_{j \neq i} (x - x_j) / (x_i - x_j)$$

avec $y_i = p_n(x_i) \ \forall i$.

Exemple : n = 3

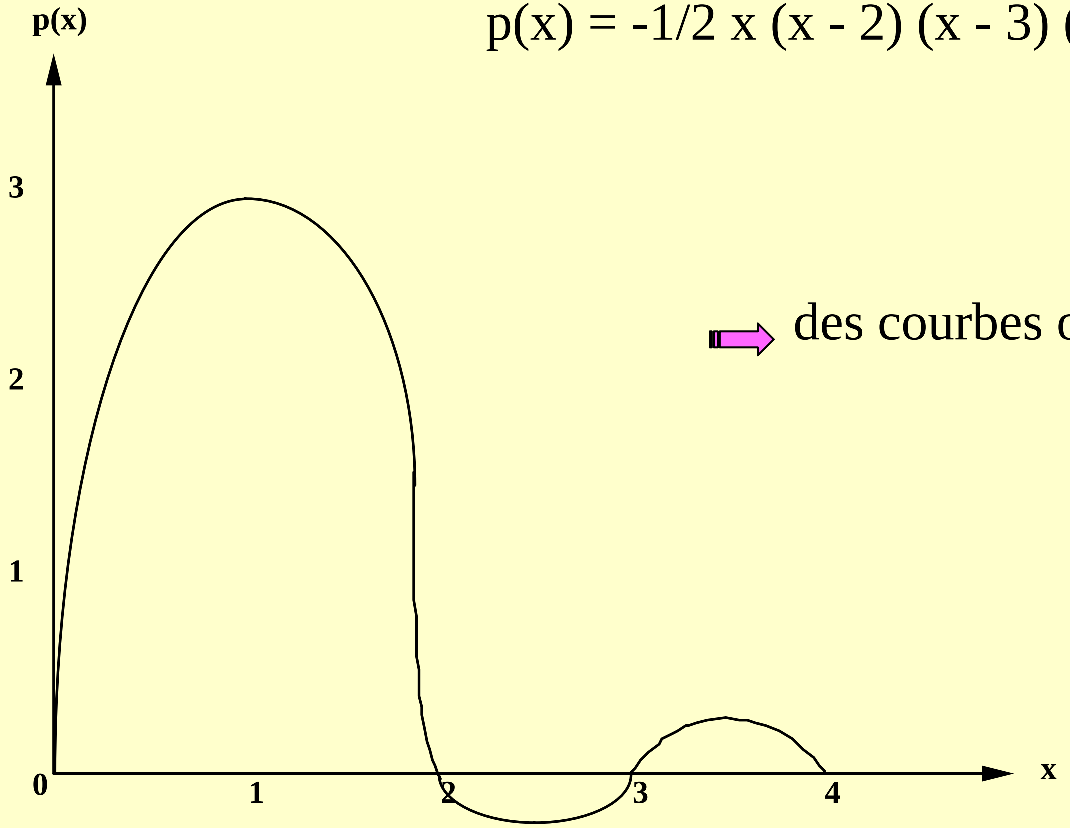
$$p_n(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

TECHNIQUES D'INTERPOLATION

Inconvénient # I : oscillation de la courbe polynomiale

- Étant donné la suite de points (0,0), (1,3), (2,0), (3,0) et (4,0), on obtient comme polynôme d'interpolation :

$$p(x) = -1/2\ x\ (x - 2)\ (x - 3)\ (x - 4)$$



➡ des courbes oscillant beaucoup

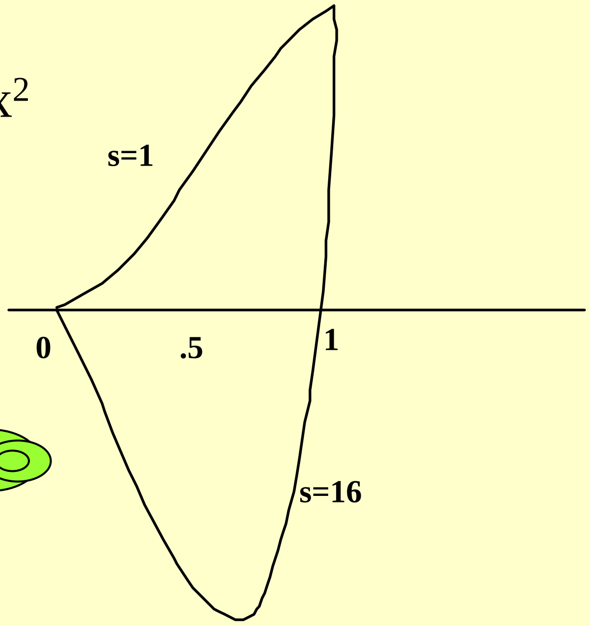
On serait peut-être intéressé à ce que le polynôme soit proche de 0 dans [2, 4] mais ce n'est pas le cas.

Inconvénient # II : Absence de contrôle local

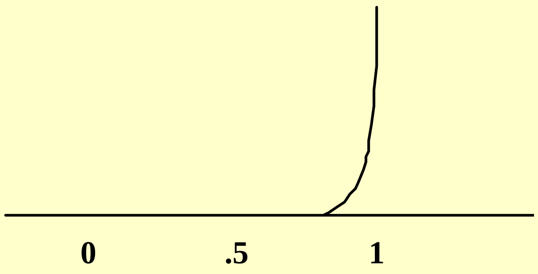
- Avec cette technique, nous n'avons aucun contrôle local i.e. une modification locale se répercute sur toute la courbe.
- Soient les 2 points (0,0) et (1,1) avec 0 et s comme pentes respectives, alors

$$p(x) = (s-2)\ x^3 + (3-s)\ x^2$$

On ne peut pas produire des changements de direction brusques comme en b).



(a)

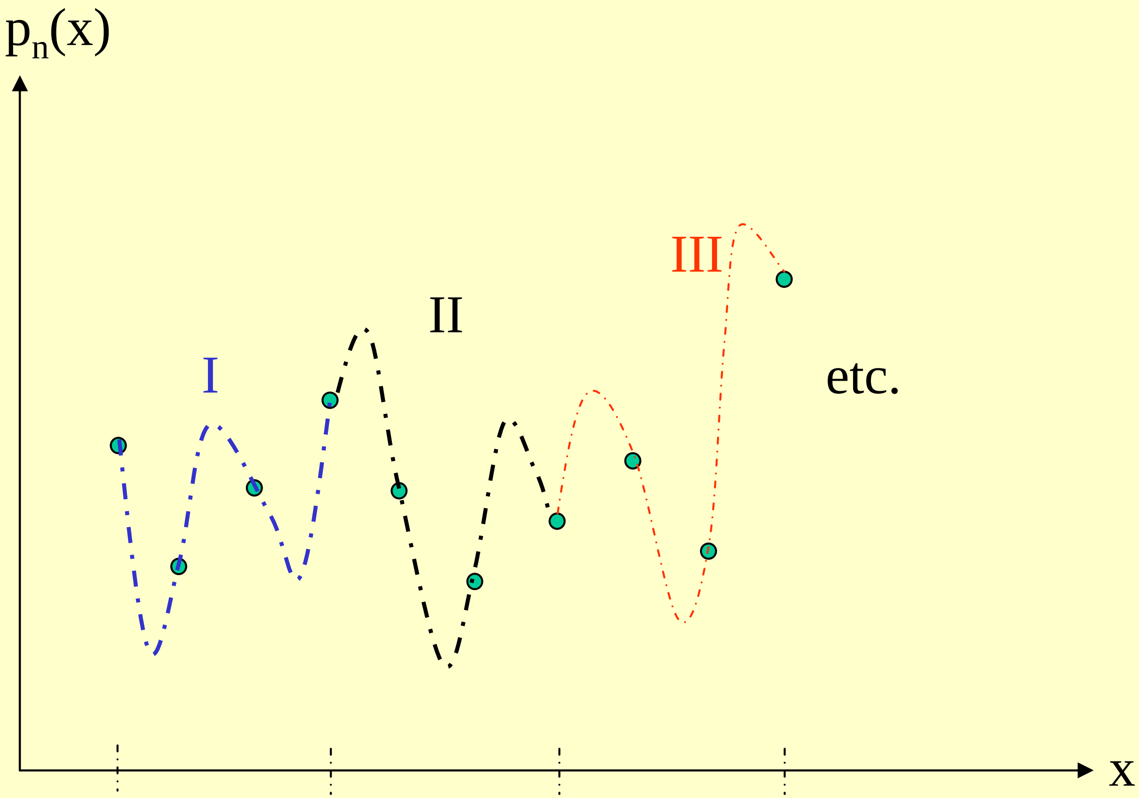


(b)

- Pour remédier à cet inconvénient, nous pouvons utiliser une interpolation polynomiale par morceaux.

On considère habituellement des fonctions polynomiales par morceaux : le domaine est subdivisé en intervalles et une courbe d'interpolation est définie pour chaque intervalle à partir des points définis dans cet intervalle.

Exemple de courbe d'interpolation par morceaux



La subdivision du domaine en intervalles permet de réduire le degré des polynômes.

- Simplifie l'évaluation des polynômes.
- Réduit l'oscillation des courbes polynômiales.
- Permet un contrôle local de la courbe.
- Permet d'imposer des conditions de continuité aux extrémités des courbes.

SPLINE : DÉFINITION

Une spline est une fonction polynomiale par morceaux:

$$p(x) = p_i(x), \qquad x \in [v_i, v_{i+1}], \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

avec $\quad p^{(j)}{}_i(v_i) = p^{(j)}{}_{i+1}(v_i), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, r-1 \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1$

où $\quad v_0 = a \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_{k-1} \leq v_k = b,$

$p_i(x) =$ polynôme de degré $\leq m$,

$p^{(0)}{}_i(x) = p_i(x)$ pour tout $x \in [v_i, v_{i+1}]$, pour tout i,

$p^{(j)}{}_i(x) = d^{(j)}p_i(x) \,/\, d^{(j)}x, \qquad j > 0.$

Problèmes rencontrés dans le choix d'une spline :

- Comment subdivisez le domaine en petits intervalles ?
- Le choix d'une spline dans un tel contexte général est très difficile :
  - la présence de plusieurs paramètres - la prise en compte des contraintes.
- En infographie, on recherche des courbes d'interpolation dans l'espace 3D.

En pratique …

Soient $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, n points 3D fournis par l'usager, et
t_0 le vecteur tangent à la courbe d'interpolation à P_0,

On recherche d'abord un polynôme de degré 3 passant par P_0, P_1 et P_2 avec t_0 comme vecteur tangent à P_0, de la forme suivante :

$$Q(u) = M_0 + u\, M_1 + u^2\, M_2 + u^3\, M_3$$

Il faut alors trouver M_i, i = 0, 1, 2, 3.

1. À u = 0, on pose $Q(0) \equiv P_0$ ⇒ $M_0 = P_0$.
2. À u = 0, on pose $\dfrac{dQ(0)}{du} \equiv t_0$ ⇒ $M_1 = t_0$.
3. À u = 1, on pose $Q(1) \equiv P_2$ ⇒ $M_2 + M_3 = P_2 - P_0 - t_0$.
4. À u = ½, on pose $Q(½) \equiv P_1$ ⇒ $\frac{1}{4} M_2 + 1/8\, M_3 = P_1 - P_0 - \frac{1}{2} t_0$.

⇒ $\boxed{Q(u) = P_0 + u\, t_0 + u^2\,(-7P_0 + 8P_1 - P_2 - 3t_0) + u^3\,(6P_0 - 8P_1 + 2P_2 + 2t_0)}$

En pratique ...

- Ce polynôme coïncide avec le 1er morceau de la spline.

- Pour le 2ième morceau, on considère les points d'interpolation P_2, P_3 et P_4; l'usager n'a pas à fournir le vecteur tangent à l'extrémité initiale; il s'agit de calculer le vecteur tangent à l'extrémité terminale du 1e morceau.

Il s'agit de calculer $\frac{dQ(1)}{du}$.

$$\boxed{\frac{dQ(u)}{du} = t_0 + 2u\,(-7P_0 + 8P_1 - P_2 - 3t_0) + 3u^2\,(6P_0 - 8P_1 + 2P_2 + 2t_0)}$$

À u = 1, on obtient : $\boxed{4P_0 - 8P_1 + 4P_2 + t_0}$

- On procède de la même façon pour les morceaux suivants.

Surfaces d ’interpolation

- La détermination d’une surface d’interpolation polynômiale passant par la grille de points suivante : P_{ij}, i = 0, 1, 2, …, m; j = 0, 1, 2, …, n est un problème plutôt difficile à résoudre dans le contexte de la synthèse d’images.

Approche I :

Pour chaque i variant de 0 à m-1,

pour chaque j variant de 0 à n-1,

construire une surface bilinéaire à partir des points $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$ et $P_{i+1,j+1}$.

Approche II :

Pour chaque i variant de 0 à m,

construire une courbe d’interpolation par morceaux C_i passant par les points $P_{i,0}$, $P_{i,1}$, $P_{i,2}$, …, $P_{i,n}$.

Pour chaque i variant de 0 à m-1,

construire une surface guidée à partir des courbes d’interpolation par morceaux C_i et C_{i+1}.

Approche III :

Pour chaque i variant de 0 à m,

construire une courbe d'interpolation par morceaux H_i passant par les points $P_{i,0}, P_{i,1}, P_{i,2}, \ldots, P_{i,n}$.

Pour chaque j variant de 0 à n,

construire une courbe d'interpolation par morceaux V_j passant par les points $P_{0,j}, P_{1,j}, P_{2,j}, \ldots, P_{m,j}$.

Pour chaque i variant de 0 à m-1,

pour chaque j variant de 0 à n-1,

construire une surface de Coons linéaire à partir des 4 courbes suivantes :

- le j^ième morceau de H_i,
- le j^ième morceau de H_{i+1},
- le i^ième morceau de V_j,
- le i^ième morceau de V_{j+1}.

Évaluation d’une fonction polynomiale

Évaluation d'une fonction polynomiale

Évaluation d'un polynôme

Règle de Horner

Soit $p(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots + a_n u^n$

l'évaluation se fait alors comme suit :

$p(u) = ((\ldots(a_n u + a_{n-1})u + a_{n-2})u + \ldots. + a_1)u + a_0$

\# additions : n

\# multiplications : n

Méthodes d'incrémentation

Évaluation d'un polynôme à des intervalles constants.

1er cas: $p(u) = c\,u + d$

Calculer les valeurs $p_i = p(i\,\delta)$, $0 \le i \le n$ et $\delta = 1 / n$.

Sachant que $p_{i+1} - p_i = c\,\delta$, et que $c\,\delta$ est une constante, une opération d'addition seulement est nécessaire pour calculer chaque p_i.

Évaluation d'un polynôme

2ième cas: Polynôme de degré 3: $p(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$

Posons $\Delta_{1,i} = p_{i+1} - p_i = p((i+1)\,\delta) - p(i\,\delta)$

$\Delta_{2,i} = \Delta_{1,i+1} - \Delta_{1,i} = p((i+2)\,\delta) - 2p((i+1)\,\delta) + p(i\,\delta)$

$\Delta_{3,i} = \Delta_{2,i+1} - \Delta_{2,i}$

$\Rightarrow \Delta_{1,i} = a_3\,\delta^3(3i^2 + 3i + 1) + a_2\delta^2(2i + 1) + a_1\,\delta$

$\Rightarrow \Delta_{2,i} = a_3\,\delta^3(6i + 6) + 2a_2\,\delta^2$

$\Rightarrow \Delta_{3,i} = 6a_3\,\delta^3 = \text{constante}$

Étape 0

$p \leftarrow a_0$

$\Delta_1 \leftarrow a_3\,\delta^3 + a_2\delta^2 + a_1\,\delta$

$\Delta_2 \leftarrow 6a_3\,\delta^3 + 2a_2\,\delta^2$

$\Delta_3 \leftarrow 6a_3\,\delta^3$

traitement de $p = p_0$

Étape 1

Pour tout i de 0 à n-1

$p \leftarrow p + \Delta_1$ // $p_{i+1} = p_i + \Delta_{1,i}$

$\Delta_1 \leftarrow \Delta_1 + \Delta_2$ // $\Delta_{1,i+1} = \Delta_{1,i} + \Delta_{2,i}$

$\Delta_2 \leftarrow \Delta_2 + \Delta_3$ // $\Delta_{2,i+1} = \Delta_{2,i} + \Delta_{3,i}$

traitement de $p = p_{i+1}$.