Technique de points de contrôle: Formes de Bézier

Courbes, surfaces et volumes

Définition d'une courbe de Bézier

- Soient $P_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., N$, l'ensemble des points de contrôle,

$$C(u) = \sum_{i=0,1,2,\ ...,\ N} f_{i,N}(u)\ P_i \qquad\qquad u \in [0,1]$$

C représente une courbe de Bézier de degré N dans l'espace à 3 dimensions comme étant une somme pondérée des points de contrôle fournis par l'usager.

- C est une courbe paramétrique où, à chaque valeur de u correspond un point sur la courbe et vice versa.

- Pour déterminer les poids associés aux points de contrôle, i.e. les fonctions $f_{i,N}(u)$, Bézier a exigé les propriétés suivantes :

(1) La courbe de Bézier doit passer par P_0 et P_N pour contrôler parfaitement la position des deux extrémités de la courbe. Les autres points de contrôle ne font pas partie de la courbe.

(2) La tangente à la courbe en P_0 est définie par $P_1 - P_0$ et la tangente à la courbe en P_N est définie par $P_N – P_{N-1}$ pour contrôler la tangente aux deux extrémités.

(3) La propriété précédente peut être généralisée à des dérivées d'ordre plus élevé. Ex. : la dérivée d'ordre 2 à P_0 est définie par P_0, P_1 et P_2.

En général, la dérivée d'ordre r à P_0 est définie par $\{P_i, i = 0, 1, 2, ..., r\}$.

Nous obtenons un résultat semblable pour l'autre extrémité P_N.

On pourra facilement construire des splines à l'aide des courbes de Bézier.

(4) Les fonctions $f_{i,N}(u)$, $i = 0, 1, 2, ..., N$ sont symétriques par rapport à u et 1 – u c'est-à-dire, $f_{i,N}(u) = f_{N-i,N}(1 - u)$.

Cela signifie que nous pouvons inverser la suite de points de contrôle définissant la courbe sans changer la forme de celle-ci :

$$\tilde{P}_i \equiv P_{N-i}, \; i = 0, 1, 2, ..., N,$$

Cela modifie seulement le sens de parcours dans l'espace paramétrique $u \in [0,1]$.

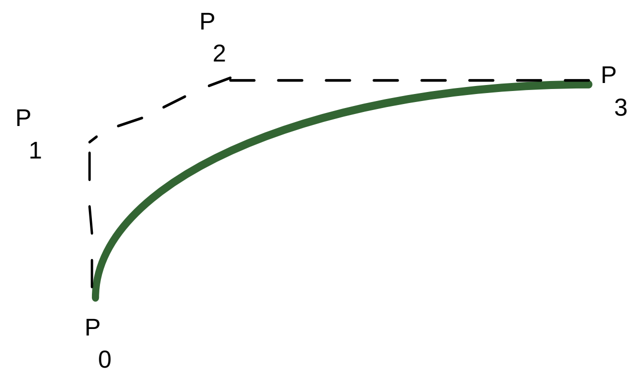
- Bézier a choisi la famille de fonctions suivantes pour satisfaire à ces propriétés :

  $f_{i,N}(u) = \binom{N}{i} u^i (1-u)^{N-i}$ est une distribution binomiale de paramètre u et N.

$X \sim \mathrm{Bin}(N, u) \equiv$

$$\mathrm{Prob}(X = x) = \begin{cases} \binom{N}{x} u^x (1-u)^{N-x}, & x = 0, 1, 2, \ldots, N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

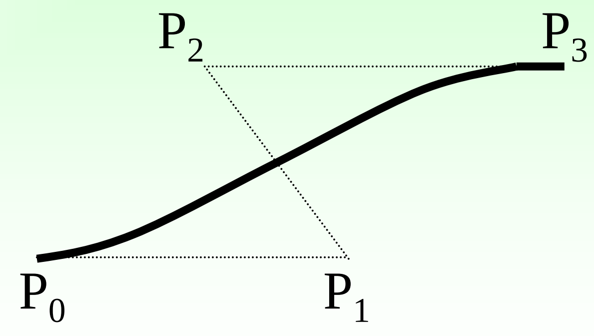
= # succès sur n répétitions indépendantes où u = probabilité qu'une expérience soit une réussite.



Courbe de Bézier de degré 3

N = 3

$$C(u) = (1-u)^3\, P_0 + 3u\,(1-u)^2\, P_1 + 3u^2\,(1-u)\, P_2 + u^3\, P_3, \quad u \in [0, 1]$$



Propriétés des courbes de Bézier

Quelques propriétés des courbes de Bézier dans l'espace à 3 dimensions :

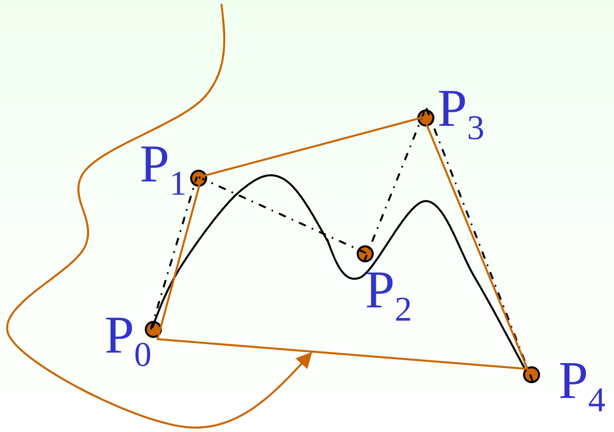
1) $C(0) = P_0$
$C(1) = P_N$

2) $\sum_{i=0,1,2,\,...,\,N} f_{i,N}(u) = 1$ pour tout $u \in [0,1]$

car les fonctions $f_{i,N}(u)$ correspondent à une distribution binomiale et, par conséquent, la somme des probabilités est égale à 1.

$\Downarrow$

$C(u) \in conv(P_0, P_1, P_2, ...,P_N)$ pour tout $u \in [0,1]$.



Propriétés des courbes de Bézier

3) $C'(u)_{\text{à } u = 0} = N\,(P_1 - P_0)$

$\Downarrow$

le segment est tangent à la courbe en P_0.

$C'(u)_{\text{à } u = 1} = N\,(P_N - P_{N-1})$

$\Downarrow$

le segment est tangent à la courbe en P_N.

Exemple :

$$\boxed{C(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u\,(1-u)^2 P_1 + 3u^2 (1-u)\,P_2 + u^3 P_3, \quad u \in [0, 1]}$$

$$\frac{dC(u)}{du} = 3\{(1-u)^2 P_1 + u(1-u)P_2 + u^2 P_3 - (1-u)^2 P_0 - u(1-u)P_1 - u^2 P_2\}$$

$$u \in [0, 1]$$

$$\left.\frac{dC(u)}{du}\right|_{u=0} = 3\,(P_1 - P_0) \quad \text{et} \quad \left.\frac{dC(u)}{du}\right|_{u=1} = 3\,(P_3 - P_2)$$

Propriétés des courbes de Bézier

4) Une transformation affine T aux points de la courbe revient à appliquer T aux points de contrôle de celle-ci.

$$\sum_{i=0,1,2,\ldots,N} f_{i,N}(u)\,(T\,P_i) = T\left(\sum_{i=0,1,2,\ldots,N} f_{i,N}(u)\,P_i\right)$$

Cette propriété n'est pas satisfaite pour des transformations en perspective.

5) Ne permet pas des modifications locales à la courbe.

Ex.: une légère perturbation à P_i entraîne des changements sur toute la courbe car les poids sont non nuls dans (0, 1).

6) C(u) est un polynôme en u de degré N. Si N est élevé, cela est coûteux d'évaluer C(u).

Propriétés des courbes de Bézier

7) Le poids de P_i est : $\binom{N}{i} u^i (1-u)^{N-i}$

$\Rightarrow$ le poids maximum de P_i est telle que $\frac{df_{i,N}}{du}(u) = 0$

$$\Rightarrow i\, u^{i-1}(1-u)^{N-i} - (N-i)\, u^i (1-u)^{N-i-1} = 0$$

$$\Rightarrow i\,(1-u) - (N-i)\,u = 0$$

$$\Rightarrow i - N\,u = 0$$

$$\Rightarrow u = i / N.$$

Exemple :

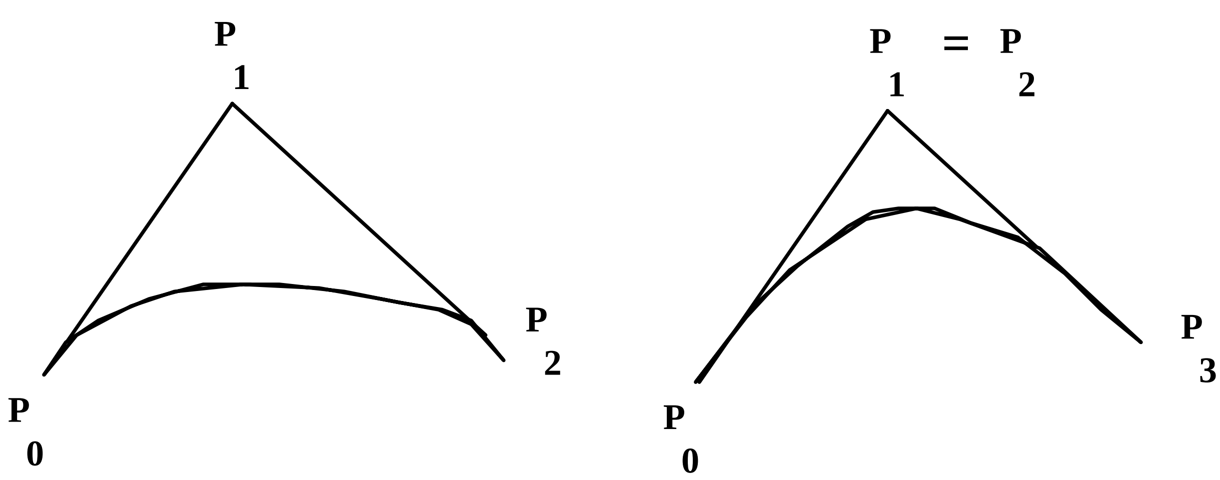
$$C(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u\,(1-u)^2 P_1 + 3u^2 (1-u) P_2 + u^3 P_3, \quad u \in [0, 1]$$

$$\frac{d[3u\,(1-u)^2]}{du} = \frac{d[3u + 3u^3 - 6u^2]}{du} = 3 + 9u^2 - 12u = 0 \Rightarrow u = 1/3.$$

Propriétés des courbes de Bézier

8) En augmentant la multiplicité d'un point, le poids associé à ce point est augmenté.

$$P_i = P_{i+1} \implies f_{i,N}(u) + f_{i+1,N}(u) = f_{i,N}(u)\left(1 + \underbrace{\frac{(N-i)\,u}{(i+1)(1-u)}}_{>0}\right)$$



Multiplicité d'un point

Propriétés des courbes de Bézier

9) <u>Augmentation du degré de la courbe</u>

But : obtenir une plus grande flexibilité i.e. un plus grand potentiel de modélisation.

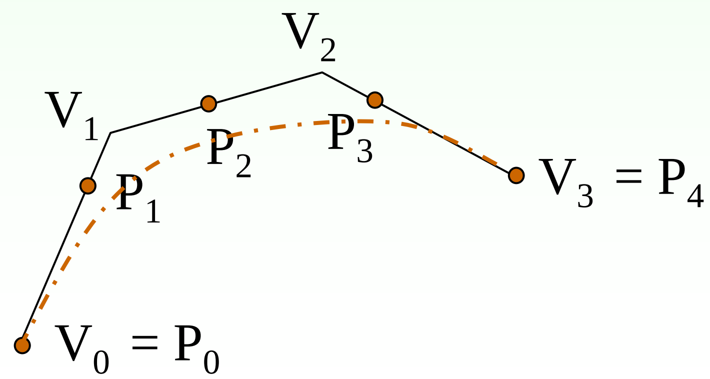
Soient $V_0, V_1, V_2, ..., V_N$ les points de contrôle d'une courbe de degré N, alors

$$P_0 = V_0$$

$$P_i = [i / (N+1)]\, V_{i-1} + [1 - i / (N+1)] V_i \qquad , i = 1, 2, ..., N$$

et $$P_{N+1} = V_N$$

sont les points de contrôle de la même courbe (mais de degré N + 1).



Le nouveau polygone de contrôle est plus près de la courbe de Bézier.

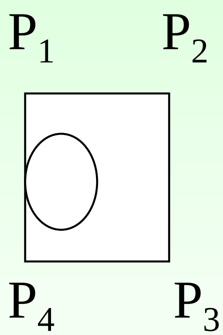
Propriétés des courbes de Bézier

10) <u>Courbe de Bézier fermée</u>

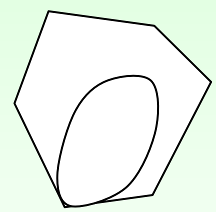
Une courbe de Bézier de degré N est fermée lorsque les premier et dernier points de contrôle coïncident.

Celle-ci est continue d'ordre 1 si P_0, P_1, P_{N-1} et $P_N = P_0$ sont colinéaires.

(a) $P_0 = P_5$



(b)



Propriétés des courbes de Bézier

11) Calcul du vecteur tangent à une courbe de Bézier

Soient $C_{0,N}(u)$: une courbe de Bézier de degré N avec comme points de contrôle $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_N$,

$C_{0,N-1}(u)$: une courbe de Bézier de degré N-1 avec comme points de contrôle $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{N-1}$,

$C_{1,N}(u)$: une courbe de Bézier de degré N-1 avec comme points de contrôle $P_1, P_2, \ldots, P_N$,

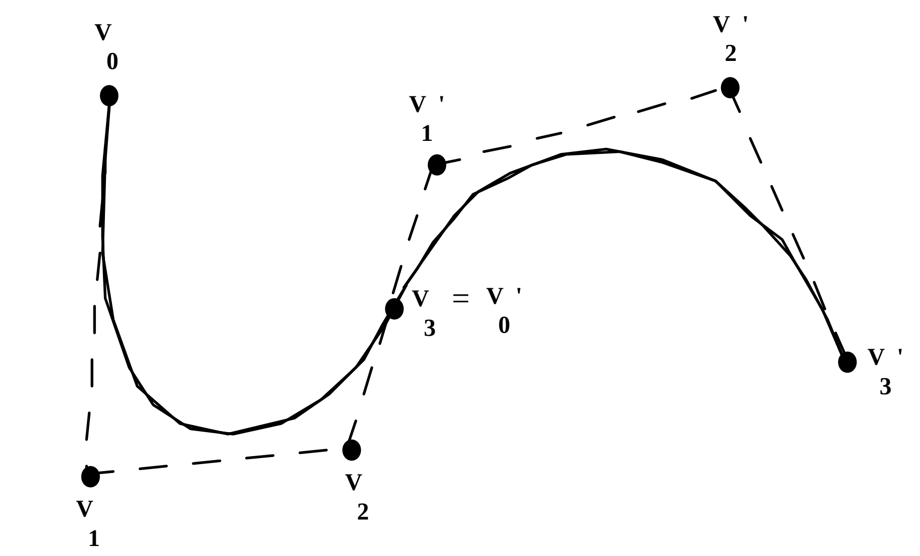
alors

$$\frac{d\, C_{0,N}(u)}{du} = N\,\{C_{1,N}(u) - C_{0,N-1}(u)\}, \quad u \in [0,1].$$

Propriétés des courbes de Bézier

12) <u>Courbes de Bézier par morceaux</u>.

L'objectif est de permettre un contrôle local sur la courbe.



Courbes de Bézier par morceaux

Continuité d'ordre 0: $V_3 = V'_0$

Continuité d'ordre 1: V_2, $V_3 = V'_0$ et V'_1 sont colinéaires, $|V_3 - V_2| = |V'_1 - V'_0|$.

Propriétés des courbes de Bézier

13) <u>Représentation d'une courbe de Bézier de degré N à partir de 2 courbes de Bézier de degré N - 1</u>

Soit la notation suivante:

$P_{jk}(u)$ = polynôme de Bézier où $P_j, P_{j+1}, \ldots, P_k$ sont les points de contrôle

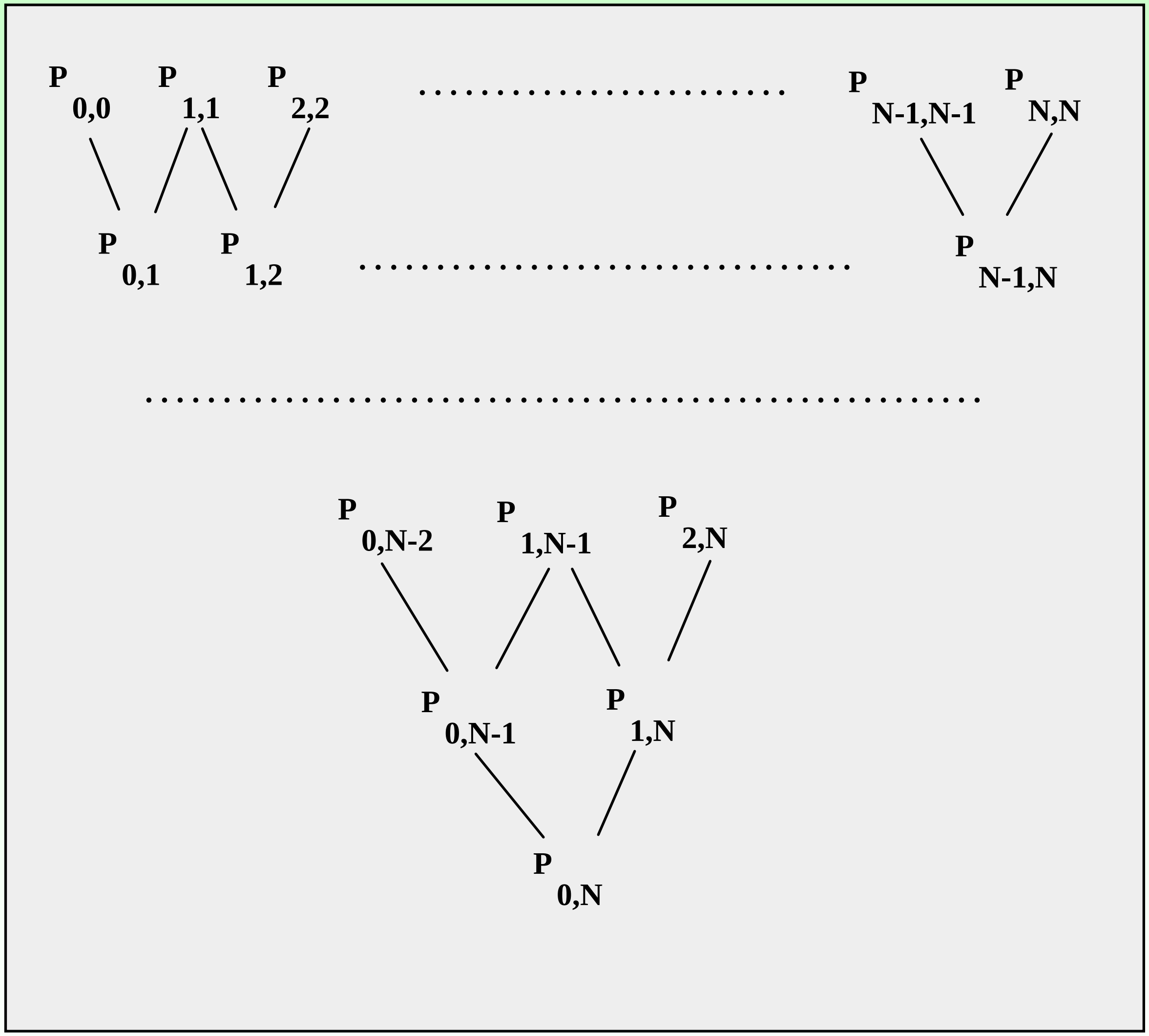
$= \sum_{i=0,1,2,\ldots,k-j} f_{i,N}(u)\, \underline{P}_i$ où $\underline{P}_i = P_{i+j}$

nous avons le résultat récursif suivant :

$$P_{0,N}(\underline{u}) = (1 - \underline{u})\, P_{0,N-1}(\underline{u}) + \underline{u}\, P_{1,N}(\underline{u}) \text{ où } P_{0,0} \equiv P_0, \ldots, P_{N,N} \equiv P_N.$$

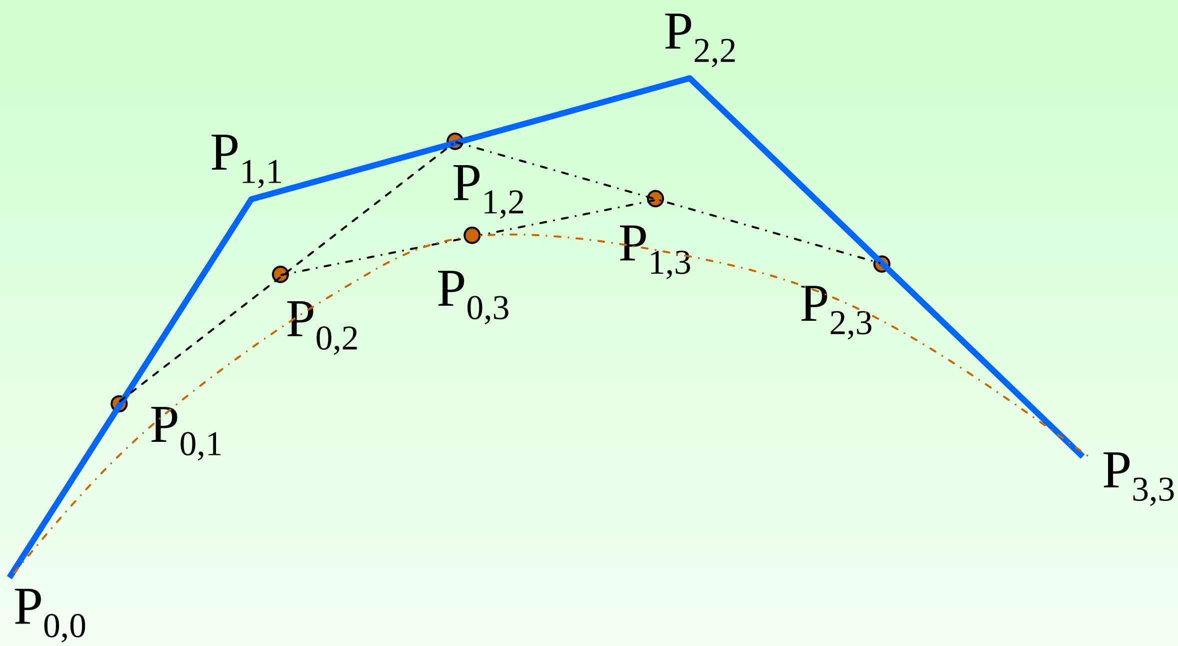
Le calcul d'un point de la courbe de Bézier de degré N nous amène à construire l'arbre récursif suivant :

Propriétés des courbes de Bézier



Les sommets $P_{0,i}$, i = 0, 1, …, N représentent les points de contrôle du tronçon de courbe entre u = 0 et u = $\underline{u}$ tandis que les sommets $P_{N-i,N}$, i = 0, 1, …, N représentent les points de contrôle du tronçon de courbe entre u = $\underline{u}$ et u = 1.

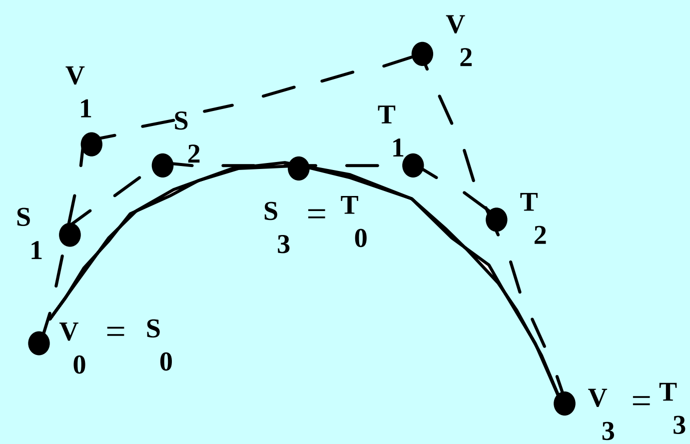
Propriétés des courbes de Bézier



Propriétés des courbes de Bézier

14) Subdivision d'une courbe de Bézier en 2 courbes de Bézier.

Pour déterminer les points de contrôle d'un morceau d'une courbe de Bézier de degré N, l'approche la plus simple est d'utiliser le résultat énoncé à la propriété **13** des courbes de Bézier et la procédure qui en découle.



Subdivision d'une courbe de Bézier

Les 2 nouveaux polygones de contrôle sont plus près de la courbe que le polygone de contrôle initial.

Génération d'une courbe de Bézier

Il existe plusieurs méthodes pour visualiser une courbe de Bézier.

APPROCHE A

Il s'agit d'approximer cette courbe par une suite d'arêtes consécutives dont les sommets sont :

$$\sum_{i=0,1,2,\ldots,N} f_{i,N}(u)\, P_i \qquad , u = 0, \Delta u, 2\Delta u, \ldots, 1.$$

La précision dépend de la valeur de Δu.

Cela peut exiger le calcul (coût important) d'un grand nombre de points.

Génération d'une courbe de Bézier

APPROCHE B

- Subdiviser une courbe de Bézier de degré d en 2 courbes de Bézier de degré d.

- Répéter le processus sur chaque segment de courbe jusqu'à ce qu'un critère de précision soit satisfait.

- On peut remarquer que cette approche n'est pas une méthode approximative car, les 2 nouvelles courbes de Bézier de degré d sont une représentation exacte de la courbe originale.

- Toutefois, la méthode approximative A est souvent utilisée lorsque le critère de précision est satisfait pour un segment de courbe.

- Plusieurs critères de précision peuvent être envisagés; ils cherchent souvent à évaluer la proximité du segment de courbe de Bézier avec le polygone de contrôle associé.

Génération d'une courbe de Bézier

APPROCHE C

Soit la notation suivante:

$C_{jk}(u)$ = polynôme de Bézier où $P_j, P_{j+1}, \ldots, P_k$ sont les points de contrôle

$= \sum_{i=0,1,2,\ldots,k-j} f_{i,N}(u)\ \underline{P}_i$ où $\underline{P}_i = P_{j+i}$

Théorème 1.

$$C_{0,N}(\underline{u}) = (1 - \underline{u})\, C_{0,N-1}(\underline{u}) + \underline{u}\, C_{1,N}(\underline{u})$$

où $C_{0,0} \equiv P_0, \ldots, C_{N,N} \equiv P_N$.

Génération d'une courbe de Bézier

Algorithme C

FOR u := 0 TO 1 BY Δu DO
    FOR I := 0 TO N DO R_i := P_i;
    M := N;
    WHILE M > 0 DO
        FOR I := 0 TO (M-1) DO $Q_i := R_i + u\,(R_{i+1} - R_i)$;
        M := M - 1;
        FOR I := 0 TO M DO R_i := Q_i;
    Afficher le point $C_{0,N}(u)$ de la courbe, i.e. R_0.

La complexité de l'algorithme est $O(N^2 / \Delta u)$.

Génération d'une courbe de Bézier

APPROCHE D

$$P(u) = \sum_{i=0,1,2,\ldots,N} C_{i,N}\, u^i (1-u)^{N-i} P_i$$

$$= (1 - u)^N \sum_{i=0,1,2,\ldots,N} C_{i,N} [u / 1-u]^i P_i$$

$$= (1 - u)^N \{P_0 + u/(1-u)[\sum_{i=1,2,\ldots,N} C_{i,N} [u / 1-u]^{i-1} P_i]\}$$

$$= (1 - u)^N \{P_0 + u/(1-u)[C_{1,N} P_1 + u/(1-u) \sum_{i=2,3,\ldots,N} C_{i,N} [u / 1-u]^{i-2} P_i]\}$$

$$\ldots$$

supposons connus $(1 - u)^N$, $u / (1 - u)$, pour tout i,

$$P(u) = (1 - u)^N \{P_0 + u/(1-u)\{C_{1,N} P_1 + u/(1-u)\{C_{2,N} P_2 +$$

$$\ldots$$

$$C_{N-3,N} P_{N-3} \quad + u/(1-u)\{C_{N-2,N} P_{N-2}$$

$$+ u/(1-u)\{C_{N-1,N} P_{N-1} + u/(1-u)P_N\}\}\ldots.\}.$$

Génération d'une courbe de Bézier

Algorithme D **: Calcul de P(u).**

FOR u := 0 TO **0.5** BY Δu DO

$Q_0 := P_N$;

FOR I := 1 TO N DO

$$Q_i := [u/(1-u)]\, Q_{i-1} + \binom{N}{N-i} P_{N-i};$$

$P(u) := (1 - u)^N\, Q_N$.

Surfaces de Bézier

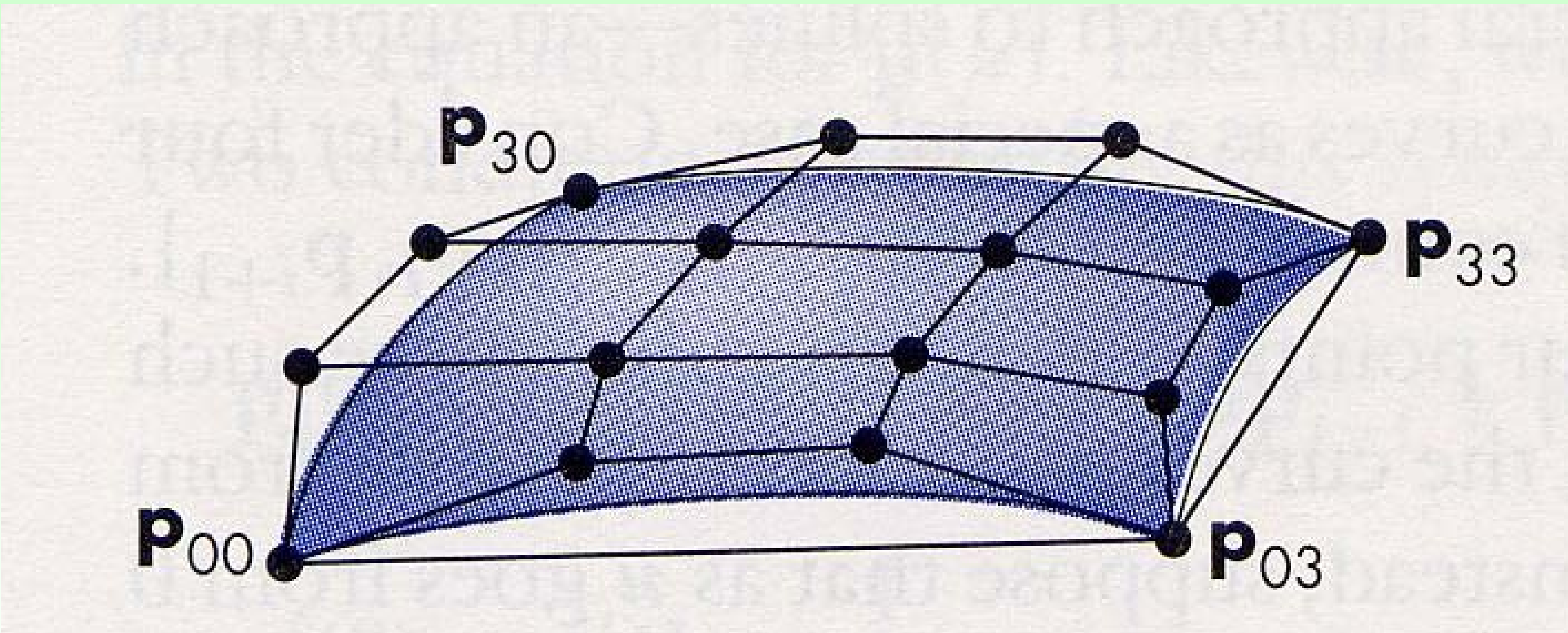
C'est une surface de la forme

$$S(u, v) = \quad \Sigma_{i=0,\,1,\,\ldots,\,m}\ \Sigma_{j=0,\,1,\,\ldots,\,n}\ P_{ij}\ f_{i,m}(u)\ f_{j,n}(v) \qquad u, v \in [0,1]$$

où $\{P_{ij}\}$ est une grille de $(m + 1) \times (n + 1)$ points de contrôle représentant les sommets d'un polyèdre de contrôle,

où $f_{i,m}(u)$ est une distribution binomiale de paramètres u et m et
$f_{j,n}(v)$ est une distribution binomiale de paramètres v et n.

Surface de Bézier
avec 4 x 4 points de contrôle



Quelques propriétés des surfaces de Bézier

- Les sommets frontières sont :

  $S(0, 0) = P_{0,0}$, $S(0, 1) = P_{0,n}$, $S(1, 0) = P_{m,0}$ et $S(1,1) = P_{m,n}$.

  Les courbes frontières sont :

  les courbes de Bézier de degré m : $S(u, 0)$ et $S(u, 1)$ et
  les courbes de Bézier de degré n : $S(0, v)$ et $S(1, v)$.

- $S(u, v) \in \text{conv}(P_{i,j} \mid i = 0, 1, \ldots, m; j = 0, 1, \ldots, n) \qquad \forall\, u, v \in [0,1]$

  la surface au complet se retrouve dans l'enveloppe convexe de la grille de points de contrôle.

- En appliquant une transformation affine T aux points de contrôle définissant une surface de Bézier, cela revient à appliquer la même transformation T à l'ensemble des points de la surface.

$$\sum_{i=0,1,2,\ldots,m} \sum_{j=0,1,2,\ldots,n} f_{i,m}(u)\, f_{j,n}(v)\, (T\ P_{i,j}) =$$

$$T\left(\sum_{i=0,1,2,\ldots,m} \sum_{j=0,1,2,\ldots,n} f_{i,m}(u)\, f_{j,n}(v)\ P_{i,j}\right)$$

$$\left.\frac{d\,S(u,v)}{du}\right|_{u=0,\,v=0} = m\,(P_{1,0} - P_{0,0})$$

$$\left.\frac{d\,S(u,v)}{du}\right|_{u=1,\,v=0} = m\,(P_{m,0} - P_{m-1,0})$$

$$\left.\frac{d\,S(u,v)}{du}\right|_{u=0,\,v=1} = m\,(P_{1,n} - P_{0,n})$$

$$\left.\frac{d\,S(u,v)}{du}\right|_{u=1,\,v=1} = m\,(P_{m,n} - P_{m-1,n})$$

$$\left.\frac{d\,S(u,v)}{dv}\right|_{u=0,\,v=0} = n\,(P_{0,1} - P_{0,0})$$

$$\left.\frac{d\,S(u,v)}{dv}\right|_{u=1,\,v=0} = n\,(P_{m,1} - P_{m,0})$$

$$\left.\frac{d\,S(u,v)}{dv}\right|_{u=0,\,v=1} = n\,(P_{0,n} - P_{0,n-1})$$

$$\left.\frac{d\,S(u,v)}{dv}\right|_{u=1,\,v=1} = n\,(P_{m,n} - P_{m,n-1})$$

- etc.
- Représentation d'une surface de Bézier m x n à partir de surfaces de Bézier de degré moindre

Soit la notation suivante:

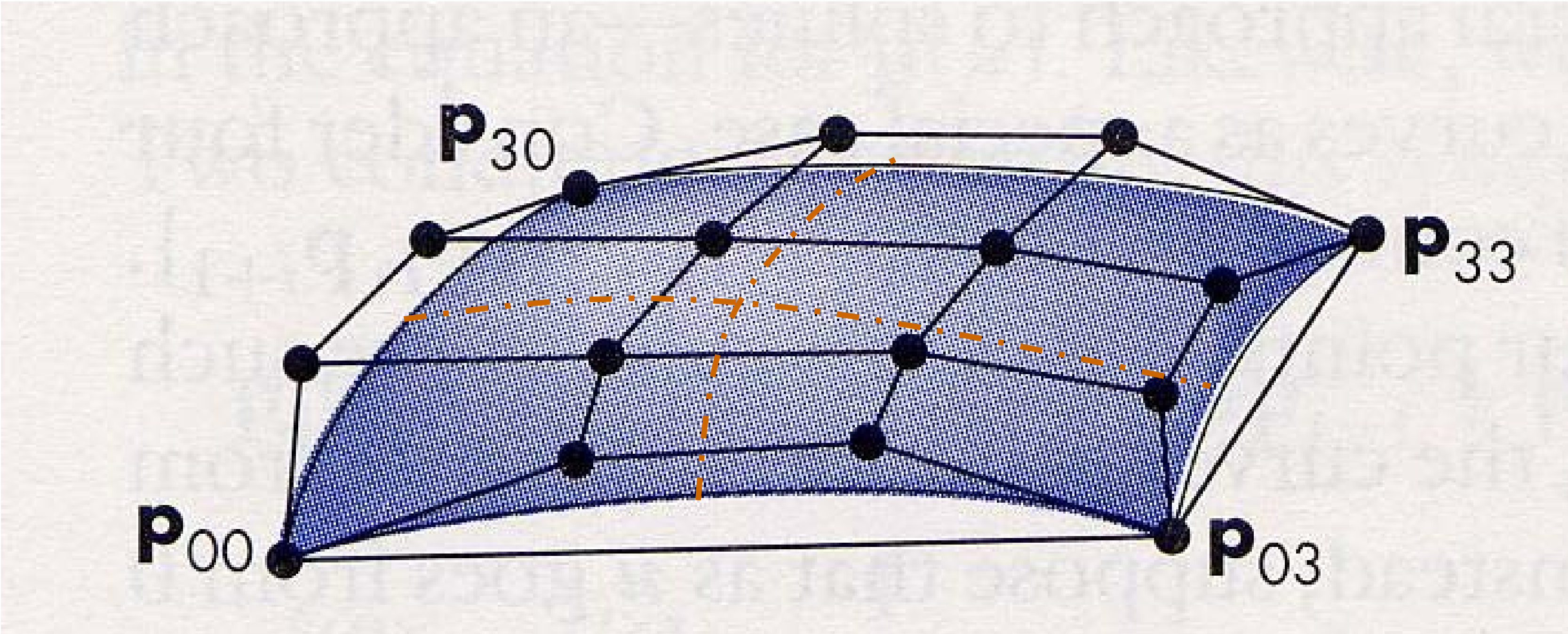
$P_{i\text{-}j,k\text{-}l}(u, v)$ = surface de Bézier (j - i) x (l - k) avec comme grille de contrôle

$$
\begin{array}{l}
P_{i,k}, P_{i,k+1}, \ldots, P_{i,l} \\
P_{i+1,k}, P_{i+1,k+1}, \ldots, P_{i+1,l} \\
P_{i+2,k}, P_{i+2,k+1}, \ldots, P_{i+2,l} \\
\quad\quad\quad \cdots \\
P_{j,k}, P_{j,k+1}, \ldots, P_{j,l}
\end{array}
$$

nous avons le résultat récursif qui suit :

$$
\begin{aligned}
P_{0\text{-}m,0\text{-}n}(u, v) = \quad & (1 - u) \{ (1 - v) P_{0\text{-}(m-1),0\text{-}(n-1)}(u,v) + v P_{0\text{-}(m-1),1\text{-}n}(u,v) \} + \\
& u \{ (1 - v) P_{1\text{-}m,0\text{-}(n-1)}(u,v) + v P_{1\text{-}m,1\text{-}n}(u,v) \} \\
& \qquad u, v \in [0,1]
\end{aligned}
$$

Subdivision d'une surface de Bézier



Exercice # 1

Déterminer les 4 sommets d'un polygone de contour dont la courbe de Bézier cubique est aussi une courbe d'interpolation pour les sommets V_0, V_1, V_2 et V_3.

Soient P_0, P_1, P_2 et P_3 les points de contrôle de la courbe de Bézier cubique, on peut en déduire immédiatement que $P_0 = V_0$ et $P_3 = V_3$ car une courbe de Bézier passe nécessairement par les premier et dernier points de contrôle.

De plus, sachant que cette courbe de Bézier a la forme suivante :

$$P(u) = (1 - u)^3 P_0 + 3u (1 - u)^2 P_1 + 3u^2 (1 - u) P_2 + u^3 P_3,$$

on peut poser les 2 équations suivantes :

$$V_1 = P(1/3) = 8/27\ V_0 + 4/9\ P_1 + 2/9\ P_2 + 1/27\ V_3,$$

$$V_2 = P(2/3) = 1/27\ V_0 + 2/9\ P_1 + 4/9\ P_2 + 8/27\ V_3.$$

On peut alors exprimer P_1 et P_2 en terme de V_0, V_1, V_2 et V_3.
en résolvant ce système d'équations.

Exercice # 2

- Qu'arrive-t-il au vecteur tangent à l'extrémité initiale d'une courbe de Bézier de degré N si $P_0 = P_1$?

Puisque

$$\frac{d\, C_{0,N}(u)}{du} = N\,\{C_{1,N}(u) - C_{0,N-1}(u)\}, \quad u \in [0,1],$$

on obtient le vecteur nul.

- Sous quelles conditions les vecteurs tangents aux extrémités d'une courbe de Bézier de degré N sont identiques lorsque ces extrémités sont aussi identiques ?

$$N\,(P_1 - P_0) = N\,(P_N - P_{N-1})$$

ou encore, $$N\,(P_1 - P_0) = N\,(P_0 - P_{N-1})$$

ou encore, $$P_0 = (P_1 + P_{N-1}) / 2$$