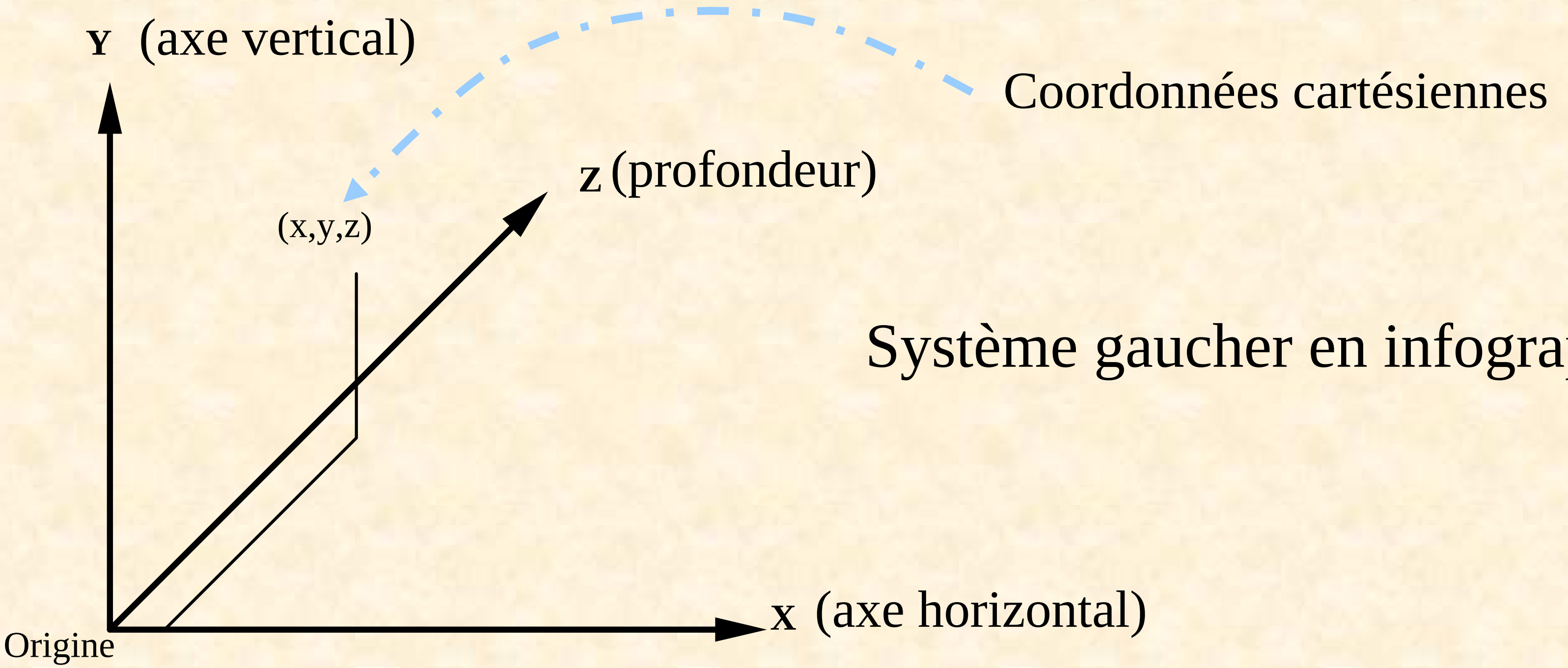
CHAPITRE III

Calcul vectoriel

Calcul vectoriel

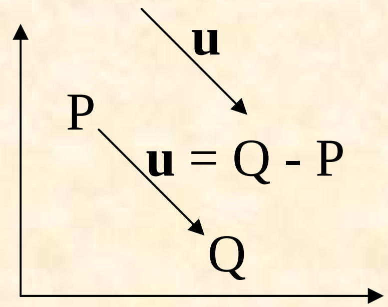
Représentation des points et vecteurs 3D



Système gaucher en infographie

Calcul vectoriel

- Soient $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ 2 vecteurs 3D,
  $P = (p_1, p_2, p_3)$ et $Q = (q_1, q_2, q_3)$ 2 points 3D,



  l'addition d'un point avec un vecteur est un point : $P + \mathbf{U}$.

- Soit $DIST(\mathbf{U},\mathbf{V})^2 = \sum_{i=1,2,3}(u_i - v_i)^2$,

  longueur d'un vecteur $\mathbf{U} = |\mathbf{U}| = Norme(\mathbf{U}) = DIST((0,0,0),\mathbf{U}) = (\sum_{i=1,2,3} u_i^{\,2})^{½}$

  $|Q – P|$ = distance entre les points P et Q,

- $UNITAIRE(\mathbf{U})$ = vecteur unitaire obtenu de $\mathbf{U} = \mathbf{U} / |\mathbf{U}|$.

- **Arithmétique vectorielle**

  a) <u>l'addition de 2 vecteurs **U** et **V**</u>

  $$\mathbf{U} + \mathbf{V} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

  b) <u>la soustraction de 2 vecteurs **U** et **V**</u>

  $$\mathbf{U} - \mathbf{V} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$$

  c) <u>la multiplication d'un vecteur **U** par un scalaire r</u>

  $$r * \mathbf{U} = (r\,u_1, r\,u_2, r\,u_3)$$

Produit scalaire de 2 vecteurs

- **le produit scalaire de 2 vecteurs U et V**

  $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = |\, \mathbf{U} \,| * |\, \mathbf{V} \,| * \cos ß$

  où ß est l'angle entre les droites définies par le prolongement de **U** et **V**.

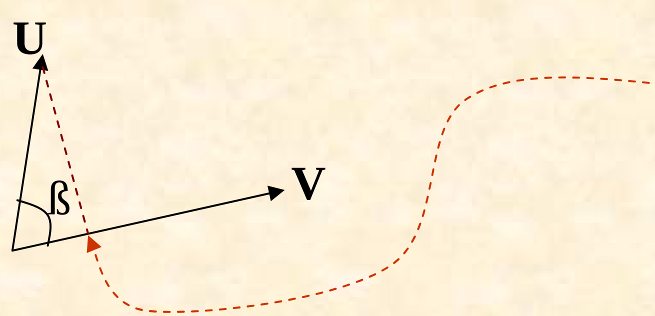
NOTE

- Si **U** et **V** sont des vecteurs unitaires, $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = \cos ß$.

- Dans un espace orthonormé, on a aussi:

  $$\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

- Si **U** et **V** sont des directions perpendiculaires alors $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = 0$.



Si **V** est unitaire

alors $\mathbf{U} \bullet \mathbf{V} = |\, \mathbf{U} \,| \cos ß$

$= $ projection de **U** sur **V**.

CALCUL VECTORIEL

Liste plus complète des propriétés du produit scalaire de vecteurs **u, v** et **w**.

$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}$

$(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}$

$(s\,\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = s\,(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$

$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}$

Note : $\theta < 90°$ si $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} > 0$
$\theta = 90°$ si $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$
$\theta > 90°$ si $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} < 0$

v et **w** sont normaux (orthogonaux ou perpendiculaires) si $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.

Produit vectoriel de 2 vecteurs

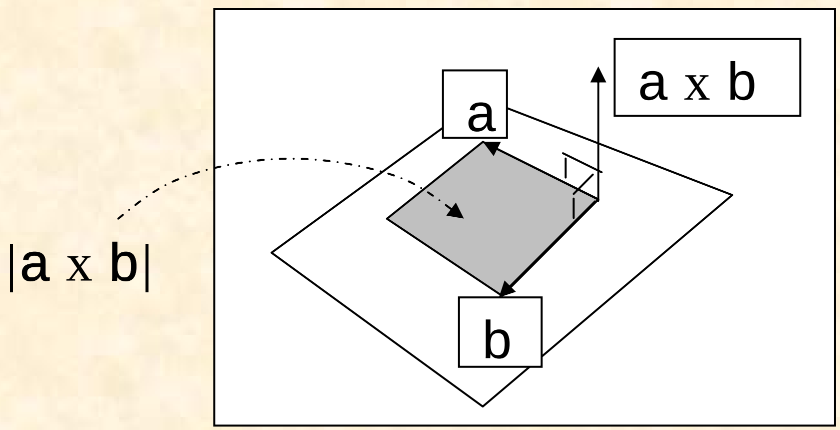
- **le produit vectoriel de 2 vecteurs U et V.**

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - v_3u_1,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

le produit vectoriel de **U** et **V** est un vecteur perpendiculaire à **U** et **V** dont la grandeur est donnée par:

$|\mathbf{U} \times \mathbf{V}| = |\mathbf{U}| * |\mathbf{V}| * \sin ß$ où ß est l'angle entre les 2 vecteurs **U** et **V**.

Cette grandeur a pour valeur la surface du parallélogramme de côtés **U** et **V**.



$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \quad \mathbf{U} / |\mathbf{U}| = \pm \mathbf{V} / |\mathbf{V}|$ ou encore $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ ou encore $\mathbf{V} = \mathbf{0}$.

Produit vectoriel de 2 vecteurs

Liste plus complète des propriétés du produit vectoriel de 2 vecteurs.

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
- $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$
- $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
- $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = - \mathbf{w} \times \mathbf{v}$
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
- $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$
- $(s\, \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = s\, (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (s\, \mathbf{w})$
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{v} = 0$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w})\, \mathbf{v} – (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})\, \mathbf{w}$
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w})\, \mathbf{v} – (\mathbf{v} \bullet \mathbf{w})\, \mathbf{u}$

CALCUL VECTORIEL

- ***Combinaison linéaire de m vecteurs*** $v_1, v_2, \ldots, v_m$

Une combinaison linéaire $w = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \ldots + s_m v_m$ où $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sont des scalaires.

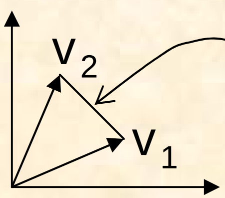
- ***Combinaison linéaire affine de m vecteurs*** $v_1, v_2, \ldots, v_m$

Une combinaison linéaire $w = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \ldots + s_m v_m$ où $s_1 + s_2 + \ldots + s_m = 1$.

- ***Combinaison linéaire convexe de m vecteurs*** $v_1, v_2, \ldots, v_m$

Une combinaison linéaire affine $w = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \ldots + s_m v_m$ où $s_i \geq 0 \; \forall i \leq m$.

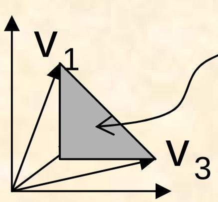
Exemple : $m = 2$



$$\boxed{w = (1 - s)\, v_1 + s\, v_2 = v_1 + s\,(v_2 - v_1) \text{ où } s \in [0, 1]}$$

Exemple : $m = 3$

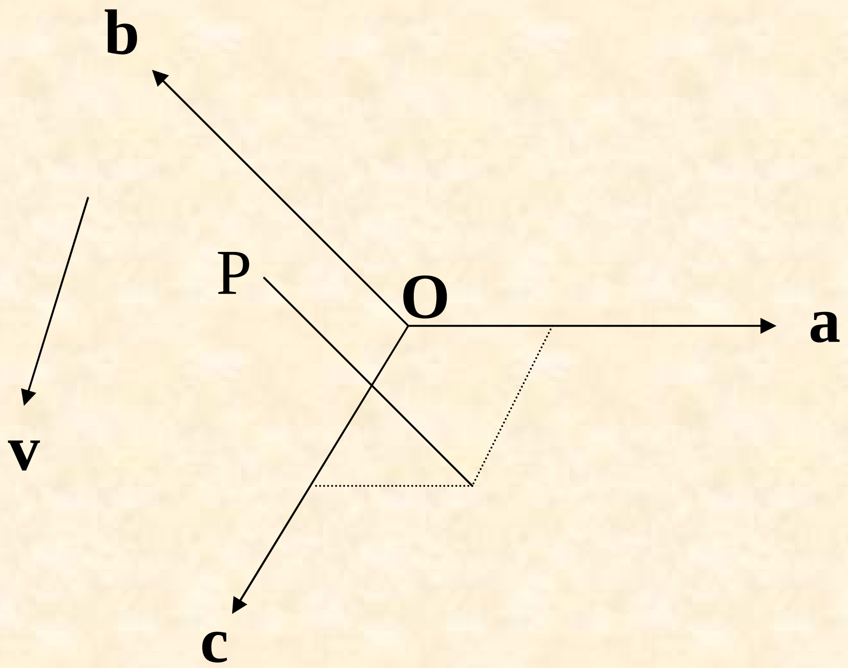
$$\boxed{q = s_1 v_1 + s_2 v_2 + (1 - s_1 - s_2)\, v_3 \text{ où } s_1, s_2 \geq 0,\ s_1 + s_2 \leq 1}$$



L'extrémité de chaque vecteur q est sur le triangle joignant v_1, v_2 et v_3.

DÉFINITION D'UN REPÈRE

Un repère est défini à partir d'un point O et de 3 vecteurs unitaires perpendiculaires deux à deux, **a**, **b** et **c**.



$\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ où $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a} + v_2\mathbf{b} + v_3\mathbf{c}$

$P \equiv (p_1, p_2, p_3)$ où $P = O + p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c}$

Un déplacement à partir de l'origine dans la direction $p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c}$

COORDONNÉES HOMOGÈNES

v = (a, b, c, O) $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et P = (a, b, c, O) $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$

v est donc représenté par le quadruplet $(v_1, v_2, v_3, 0)$ et P par $(p_1, p_2, p_3, 1)$.

Cette représentation demeure juste lors d'opérations vectorielles.

Ex. : $P - Q$, $P + \lambda\, \mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, etc.

Utile pour représenter des transformations affines

PASSAGE D'UN REPÈRE À UN AUTRE

Soient les 2 repères

$$(v_1, v_2, v_3, P_0) \text{ et } (u_1, u_2, u_3, Q_0)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \alpha_{13}v_3 \\
u_2 &= \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \alpha_{23}v_3 \\
u_3 &= \alpha_{31}v_1 + \alpha_{32}v_2 + \alpha_{33}v_3 \\
Q_0 &= \alpha_{41}v_1 + \alpha_{42}v_2 + \alpha_{43}v_3 + P_0
\end{aligned}$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ Q_0 \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{vmatrix}.$$

où la matrice d'ordre 4

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

représente le changement de repère.

Droites et plans dans l'espace

DROITES DANS L'ESPACE

- Nous pouvons définir une droite par 2 points $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

- Un point (x, y, z) appartiendra à cette droite s'il satisfait au système d'équations

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$(y - y_1)(z_2 - z_1) = (z - z_1)(y_2 - y_1)$$

$$(z - z_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(z_2 - z_1).$$

- Un autre mode de représentation correspond à la définition vectorielle suivante:

très utile

$$p(\mu) = \underbrace{p_1}_{\text{vecteur de base}} + \underbrace{\mu(p_2 - p_1)}_{\text{direction}}$$

où μ est un nombre réel quelconque.

Pour se déplacer sur cette droite, il s'agit de faire varier μ indéfiniment.

DROITES DANS L'ESPACE

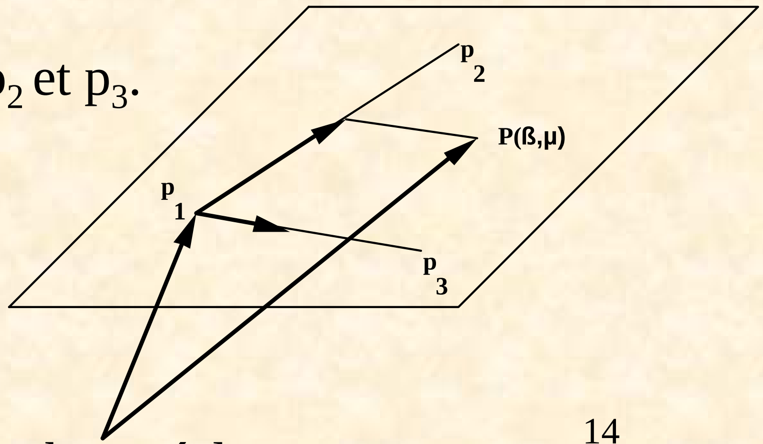
- On remarque que la direction p_2 - p_1 est parallèle à la droite p(μ).

- Pour représenter un segment de droite dont les extrémités sont p_1 et p_2, il s'agit de faire varier μ dans l'intervalle [0,1] uniquement.

- Les coordonnées du vecteur $(p_2 - p_1) / |p_2 - p_1|$ peuvent être représentées comme suit : $(\cos \beta_x, \cos \beta_y, \cos \beta_z)$

  où β_x, β_y, β_z sont les angles que font ce vecteur avec les 3 axes.

PLANS DANS L'ESPACE



- Définissons maintenant un plan par 3 points p_1, p_2 et p_3.

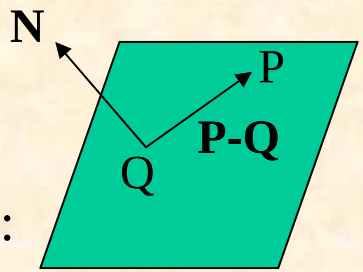
- L'équation correspondante est :

$$P(ß, \mu) = p_1 + ß\,(p_2 - p_1) + \mu(p_3 - p_1)$$

où P(ß, µ) est un point du plan et ß et µ sont 2 nombres réels.

PLANS DANS L'ESPACE

- Un plan peut aussi être défini par un de ses points $Q = (q_1, q_2, q_3)$ et un vecteur normal **N** au plan.



- En effet, soit P un point quelconque du plan,

  étant donné que P- Q est ⊥ à **N**, alors leur produit scalaire est nul:

  $$(P- Q) * \mathbf{N} = 0 \quad \text{où} \quad P = (P_x, P_y, P_z), \mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z), \quad \text{i.e.}$$

  $$P_x N_x + P_y N_y + P_z N_z - (q_1 N_x + q_2 N_y + q_3 N_z) = 0.$$

- En divisant par || N ||, on obtient ce qu'on appelle l'équation cartésienne du plan:

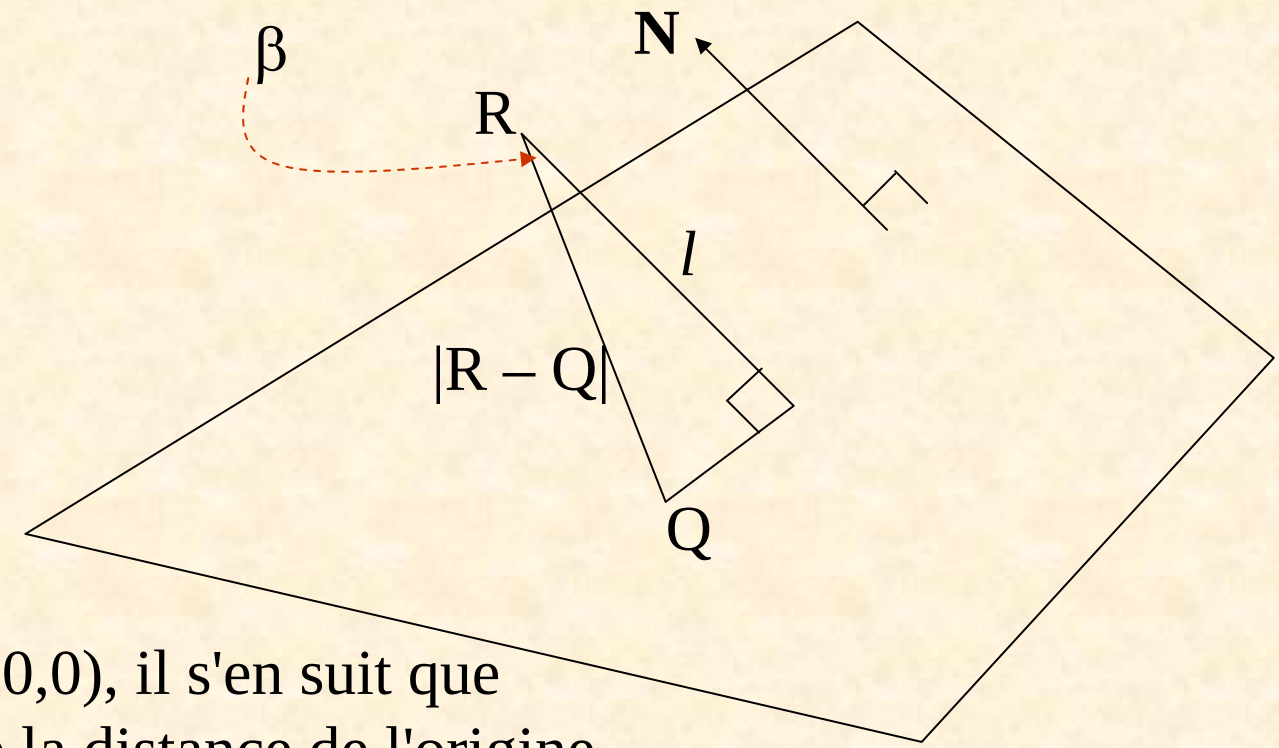
  $$A*P_x + B*P_y + C*P_z + D = 0 \quad \text{où} \quad (A,B,C) = \mathbf{N} / \|\mathbf{N}\|, \; D = - Q \bullet \mathbf{N} / \|\mathbf{N}\|.$$

Nous voulons maintenant donner une interprétation géométrique de D :

posons $l \equiv$ distance d'un point R au plan

$= $ projection du vecteur R- Q sur **N** / | **N** |

$= (R - Q) * \mathbf{N} / |\mathbf{N}|$.



En choisissant R = (0,0,0), il s'en suit que D = l i.e. D représente la distance de l'origine du système d'axes au plan.

Calcul d’une normale
à
un point d’une surface

Calcul d'une normale

Forme algébrique : $F(x, y, z) = 0$

$\therefore$ $(\partial F / \partial x, \partial F / \partial y, \partial F / \partial z)$ est normale à la surface en (x, y, z).

Exemple : $(x-c_x)^2 + (y-c_y)^2 + (z-c_z)^2 = r^2$

$$(\partial F / \partial x, \partial F / \partial y, \partial F / \partial z) = 2(x-c_x, y-c_y, z-c_z)$$

Vecteur normal à la surface en $(x, y, z) \equiv (x - c_x, y - c_y, z - c_z)$.

Forme explicite : $z = f(x, y)$

$\therefore$ $(- \partial f / \partial x, - \partial f / \partial y, 1)$ est normale à la surface en (x, y, z).

Calcul d'une normale

Forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = X(u, v) & u, v \in [0, 1] \\ y = Y(u, v) \\ z = Z(u, v) \end{cases}$$

Soit $(F_x, F_y, F_z) \equiv (\partial F / \partial x, \partial F / \partial y, \partial F / \partial z)$ un vecteur normal à la surface en (x, y, z), alors

$$\begin{cases} F_x \dfrac{\partial X}{\partial u} + F_y \dfrac{\partial Y}{\partial u} + F_z \dfrac{\partial Z}{\partial u} = 0 \\ \\ F_x \dfrac{\partial X}{\partial v} + F_y \dfrac{\partial Y}{\partial v} + F_z \dfrac{\partial Z}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

Solution non unique

Une solution est :

$$\begin{cases} F_x = Y_u Z_v - Z_u Y_v \\ F_y = -X_u Z_v + Z_u X_v \\ F_z = X_u Y_v - Y_u X_v \end{cases}$$

où $Y_u = \partial Y / \partial u, \ldots$

ou encore, $(F_x, F_y, F_z) \equiv (X_u, Y_u, Z_u) \times (X_v, Y_v, Z_v)$

Calcul d'une normale

Cas particulier : $F(x, y, z) = 0 = z - f(x, y)$

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{Z_u Y_v - Z_v Y_u}{X_u Y_v - X_v Y_u}} \\[2ex] \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{X_u Z_v - X_v Z_u}{X_u Y_v - X_v Y_u}} \end{cases}$$

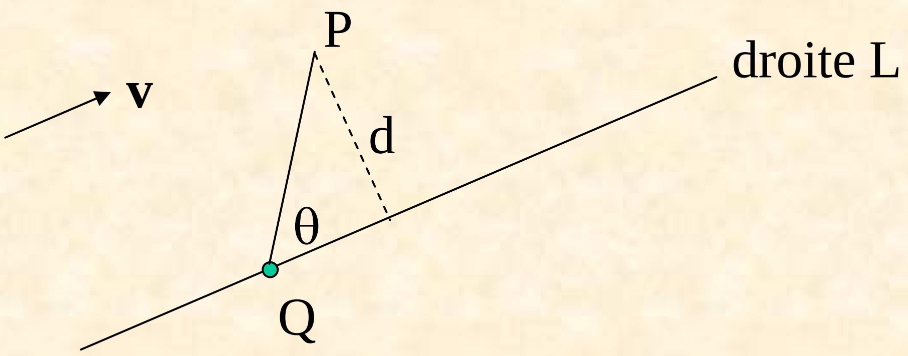
- La représentation sous forme paramétrique est souvent utilisée en modélisation.
- Ce n'est pas toujours facile de passer d'une forme de représentation à une autre.
- La forme algébrique nous permet de distinguer les 3 cas suivants :

$F(x, y, z)$	< 0	à l'intérieur de l'objet
	$= 0$	sur l'objet
	> 0	à l'extérieur de l'objet.

Exemple : polyèdre

Exercice # 1

- Calculer la distance d entre un point P et une droite L passant par un point Q dont le vecteur directeur est **v**.



$$d = |P - Q| \sin\theta$$

$$= \frac{|P - Q|\,|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|}$$

$$= \frac{|(P - Q) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Exercice # 2

- Considérons deux droites D_1 et D_2 non parallèles faisant partie d'un même plan. La droite D_1 passe par les points P_1 et Q_1 et la droite D_2 par les points P_2 et Q_2. Déterminez le point d'intersection de ces deux droites. ♦

$\exists \quad \lambda, \theta \in \Re$ tel que $P_1 + \lambda\,(Q_1 - P_1) = P_2 + \theta\,(Q_2 - P_2)$,

ou encore,

$$(P_1 \times (Q_1 - P_1)) \bullet (P_1 + \lambda\,(Q_1 - P_1)) = (P_1 \times (Q_1 - P_1)) \bullet (P_2 + \theta\,(Q_2 - P_2)).$$

En simplifiant grâce aux propriétés du produit vectoriel, on obtient :

$$0 = (P_1 \times (Q_1 - P_1)) \bullet (P_2 + \theta\,(Q_2 - P_2)).$$

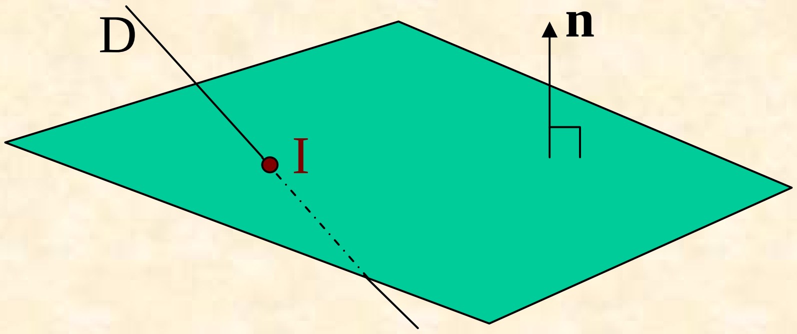
Ainsi, nous pouvons en déduire que :

$$\theta = - \frac{(P_1 \times (Q_1 - P_1)) \bullet P_2}{(P_1 \times (Q_1 - P_1)) \bullet (Q_2 - P_2)}$$

Le point d'intersection s'exprime comme suit : $P_2 + \theta\,(Q_2 - P_2)$, avec comme valeur de θ celle obtenue ci-dessus.

Exercice # 3

- Considérons une droite D passant par les points P et Q et un plan défini par un point R et un vecteur normale **n**. En supposant que D n'est pas parallèle au plan et n'en fait pas partie, calculer le point d'intersection I entre la droite D et ce plan. ♦



$$I \equiv P + \lambda\,(Q - P), \qquad \lambda \in \Re$$

Puisque I appartient au plan, $\mathbf{n} \bullet (P + \lambda\,(Q - P)) = \mathbf{n} \bullet R$.

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{\mathbf{n} \bullet R - \mathbf{n} \bullet P}{\mathbf{n} \bullet (Q - P)}, \qquad \text{si } \mathbf{n} \bullet (Q - P) \neq 0$$

de sorte que

$$I = P + \left(\frac{\mathbf{n} \bullet R - \mathbf{n} \bullet P}{\mathbf{n} \bullet (Q - P)} \right) (Q - P), \qquad \text{si } \mathbf{n} \bullet (Q - P) \neq 0.$$

Exercice # 4

Calculer l'intersection entre le segment de droite d'extrémités p et q et le plan $\prod \equiv \mathbf{n} \bullet P = \mathbf{n} \bullet r$ où $\mathbf{n}$ et r sont respectivement la normale et un point de $\prod$.

1er cas : $\mathbf{n} \bullet p < \mathbf{n} \bullet r$ et $\mathbf{n} \bullet q < \mathbf{n} \bullet r$

aucune intersection.

2ième cas : $\mathbf{n} \bullet p > \mathbf{n} \bullet r$ et $\mathbf{n} \bullet q > \mathbf{n} \bullet r$

aucune intersection.

3ième cas : $\mathbf{n} \bullet p = \mathbf{n} \bullet r$ et $\mathbf{n} \bullet q = \mathbf{n} \bullet r$

L'intersection est le segment de droite d'extrémités p et q.

4ième cas : autrement

Il s'agit du point d'intersection entre la droite passant par p et q et le plan $\prod$.

Exercice # 5

Calculez la **normale** en chacun des points d'une surface de la forme :

$$S(u, v) = (r \cos 2\pi\, u, r \sin 2\pi\, u \cos 2\pi\, v, r \sin 2\pi\, u \sin 2\pi\, v) \qquad u, v \in [0, 1]$$

où r est une constante fixée.

La normale peut s'exprimer comme suit : $N(u, v) = [\partial S(u, v) / \partial u] \ X\ [\partial S(u, v) / \partial v]$

où $\partial S(u, v) / \partial u = (- 2\pi r \sin 2\pi u, 2\pi r \cos 2\pi u \cos 2\pi v, 2\pi r \cos 2\pi u \sin 2\pi v)$,

$\partial S(u, v) / \partial v = (0, - 2\pi r \sin 2\pi u \sin 2\pi v, 2\pi r \sin 2\pi u \cos 2\pi v)$.

Par conséquent,

$$N(u, v) = (4\pi^2 r^2 \cos^2 2\pi v \ \cos 2\pi u \sin 2\pi u + 4\pi^2 r^2 \sin^2 2\pi v \cos 2\pi u \sin 2\pi u, \quad 4\pi^2 r^2 \cos 2\pi v \sin^2 2\pi u, 4\pi^2 r^2 \sin^2 2\pi u \sin 2\pi v)$$

$$= (4\pi^2 r^2 \cos 2\pi u \sin 2\pi u, 4\pi^2 r^2 \cos 2\pi v \sin^2 2\pi u, 4\pi^2 r^2 \sin^2 2\pi u \sin 2\pi v)$$

$$= 4\pi^2 r \sin 2\pi u\, (r \cos 2\pi u, r \cos 2\pi v \sin 2\pi u, r \sin 2\pi u \sin 2\pi v)$$

$$= 4\pi^2 r \sin 2\pi u\, S(u, v).$$

En normalisant, on obtient le vecteur unitaire S(u, v) / r.