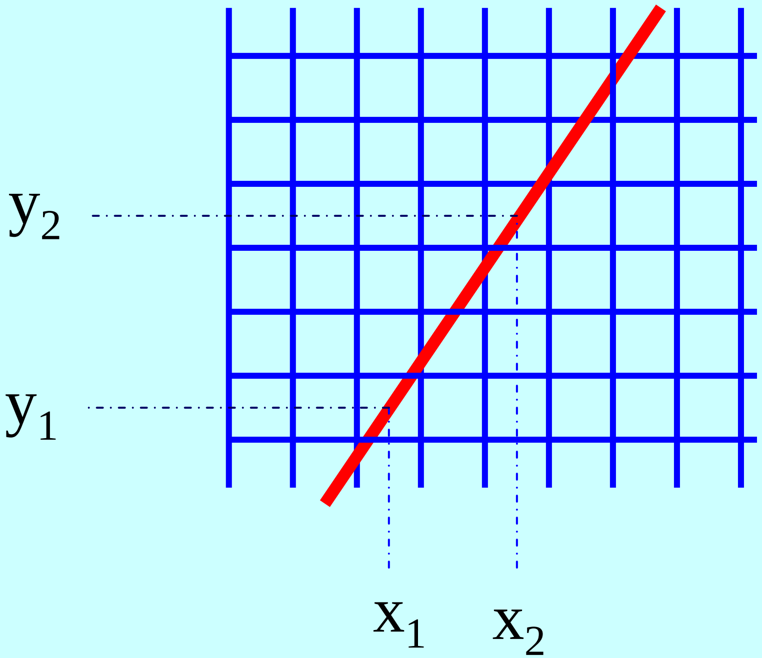
Génération
d’un
segment de droite

Génération d’un segment de droite « point par point »



8	1	2
7		3
6	5	4

VOISINAGE D’UN POINT

Objectif : Afficher le segment de droite (x_1, y_1)-(x_2, y_2) i.e. choisir les « pixels » les plus « proches » du segment à tracer.

Critères de choix d’un bon algorithme :

- simplicité
- efficacité
- Correspondance avec le segment réel

Algorithme DDA

Soient (x_1, y_1)-(x_2, y_2) les extrémités du segment, $\Delta x = x_2 - x_1$

(x, y) le point courant, $\Delta y = y_2 - y_1$

(x', y') est le prochain point généré.

où $x' = x + \varepsilon\, \Delta x$, $\varepsilon > 0$

$y' = y + \varepsilon\, \Delta y$

$(x', y') \in$ segment de droite (x_1, y_1)-(x_2, y_2) car

$(y' - y) / (x' - x) = \Delta y / \Delta x$ = pente du segment de droite

$([x' + 0.5], [y' + 0.5])$ est considéré.

Plusieurs choix du pas ε

A $\varepsilon = 1 / \max(|\Delta x|, |\Delta y|)$ ⇒ $\varepsilon\,\Delta x = \pm 1$ et $\varepsilon\,\Delta y = \pm$ pente

ou

$\varepsilon\,\Delta y = \pm 1$ et $\varepsilon\,\Delta x = \pm\, 1 /$ pente

Implantation :

$|\Delta y| > |\Delta x|$

vrai :

Nb_de_points_generes ← $|\Delta y|$
xinc ← Δx / Nb_de_points_generes
yinc ← (signe de Δy) 1

faux :

Nb_de_points_generes ← $|\Delta x|$
yinc ← Δy / Nb_de_points_generes
xinc ← (signe de Δx) 1

$x \leftarrow x_1 + 0.5;$ $y \leftarrow y_1 + 0.5;$

Répéter "Nb_de_points_generes" fois

{
Afficher([x], [y])
$x \leftarrow x + xinc$
$y \leftarrow y + yinc$
}

Algorithme DDA avec $\varepsilon = 1 / \max(|\Delta x|, |\Delta y|)$

Une division réelle et 4 variables réelles

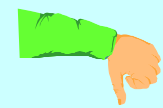
ε est-il suffisamment petit ou trop petit?

Qu'arrive-t-il dans le cas d'un segment horizontal,
d'un segment vertical
d'un segment dont la pente est ± 1

Deuxième choix du pas ε

B $\varepsilon = 2^{-n}$, où $2^{n-1} \leq \max(|\Delta x|, |\Delta y|) \leq 2^n$

Recherche de n :
- $[\log_2 \{\max(|\Delta x|, |\Delta y|)\}]$
- comment procéder?



Implantation :

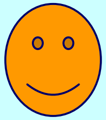
eps_dx ← |Δx| et eps_dy ← |Δy|
nb_iterations ← 1

Tant et aussi longtemps que eps_dx ≥ 1ou eps_dy ≥ 1 faire
- décaler d'une position vers la droite eps_dx
- décaler d'une position vers la droite eps_dy
- décaler d'une position vers la gauche nb_iterations

$x \leftarrow x_1 + 0.5$; $y \leftarrow y_1 + 0.5$;
eps_dx = (signe de Δx) eps_dx; eps_dy = (signe de Δy) eps_dy;
Répéter « nb_iterations » fois
- Afficher([x], [y])
- x ← x + eps_dx; y ← y + eps_dy

2^n points à afficher

Algorithme DDA avec $\varepsilon = 2^{-n}$, où $2^{n-1} \leq \max(|\Delta x|, |\Delta y|) \leq 2^n$

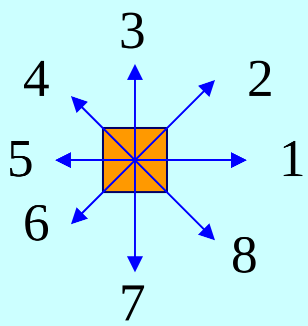


Pas de divisions réelles

Présence de variables réelles

$2^n > \max(|\Delta x|, |\Delta y|)$?????

Algorithme de Bresenham



Mouvements élémentaires à partir d'un point : 4 mouvements axiaux + 4 mouvements diagonaux

Cas simple

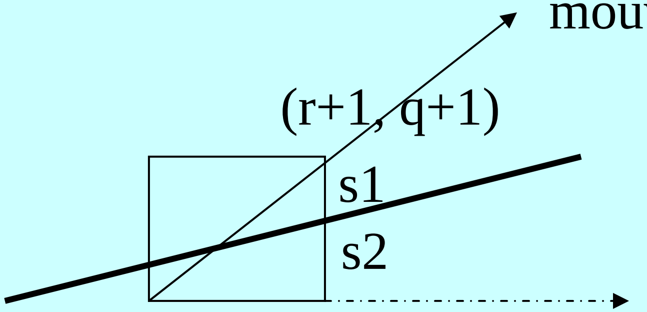
1er quadrant : $x \geq 0$, $y \geq 0$

Hypothèse non restrictive : une des extrémités du segment est prise comme origine.

Il s'agit de déterminer une suite de mouvements axiaux et/ou diagonaux.

Algorithme de Bresenham

Soit le point courant (r, q) dans le premier octant,



2 alternatives : (r+1, q) et (r+1, q+1)

Le choix se fait en comparant les longueurs s1 et s2 :

si $q+1-s < s-q$ alors effectuer un mouvement diagonal
sinon effectuer un mouvement axial

Note : On pose s ≡ordonnée du point d'intersection du segment avec la verticale $x = r + 1$.

Choix entre un mouvement axial et un mouvement diagonal

Extrémité initiale du segment : l'origine

⇨ $s = \Delta y\ (r + 1) / \Delta x$

⇨ $q + 1 - s < s - q \quad \equiv \quad q + 1 - \Delta y\ (r + 1) / \Delta x < \Delta y\ (r + 1) / \Delta x - q$

Puisque $\Delta x > 0$,

⇨ $2\ (- q\ \Delta x + r\ \Delta y) + 2\ \Delta y - \Delta x > 0$

Posons $e(r, q) = 2\ (- q\ \Delta x + r\ \Delta y) + 2\ \Delta y - \Delta x$,

⇨ $$\begin{cases} e(r+1, q) = e(r,q) + 2\ \Delta y \\ e(r+1, q+1) = e(r,q) + 2\ (\Delta y - \Delta x) \\ e(0,0) = 2\Delta y - \Delta x \end{cases}$$

Implantation de l'algorithme de Bresenham

Soient dx, dy, x, y, e, inc_axial, inc_diagonal des **variables entières**,

y $\leftarrow$ 0
inc_axial $\leftarrow$ 2 * dy;
e $\leftarrow$ inc_axial - dx;
inc_diagonal $\leftarrow$ e - dx;
Pour x = 0 jusqu'à dx faire

$$\left\{\begin{array}{l} \text{afficher}(x, y); \\ \text{si } e \geq 0 \quad \text{alors} \quad \left\{\begin{array}{l} y \leftarrow y + 1 \\ e \leftarrow e + \text{inc\_diagonal} \end{array}\right. \\ \qquad\qquad\quad \text{sinon} \quad \left\{\ e \leftarrow e + \text{inc\_axial} \right. \end{array}\right.$$

FIN

Génération d’un arc de cercle

Génération d'un arc de cercle

A. Soit C : (C_x, C_y) le centre du cercle de rayon r,
l'équation du cercle est : $(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2$.

1. Translation de -C : $x^2 + y^2 = r^2$.
2. Calcul des points (x, y) pour générer le cercle centré à l'origine.
3. Translation de C.

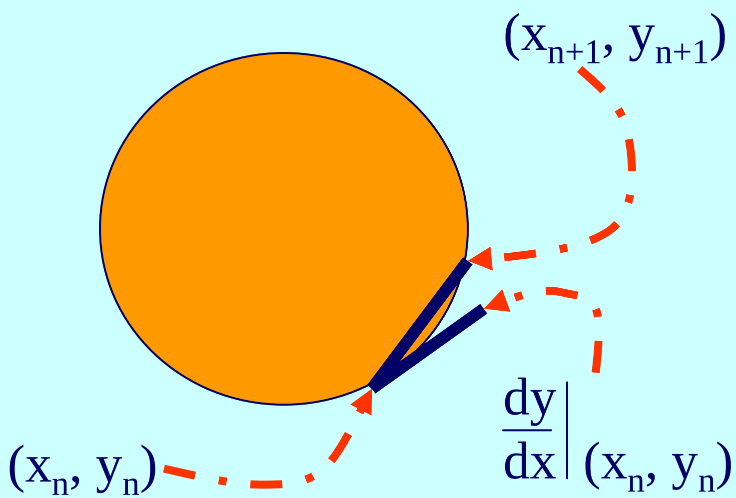
$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \qquad \frac{dy^2}{dx} = -2x = 2y\,\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \approx -\frac{x_n}{y_n}$$

$\therefore$

$$y_{n+1} - y_n = -\varepsilon\, x_n$$
$$x_{n+1} - x_n = \varepsilon\, y_n$$

où $\varepsilon = 2^{-n}$, $2^{n-1} \leq r < 2^n$



$\boxed{\text{Note :}}$ On obtient une spirale car $x^2_{n+1} + y^2_{n+1} = (1 + \varepsilon^2)\, r^2$ si $(x_n, y_n) \in$ cercle.

Génération d'un arc de cercle

Solution à ce problème :

- Si ε est petit, aucun problème.
- Alternative : $\therefore$

$$x_{n+1} - x_n = \varepsilon\, y_n$$
$$y_{n+1} - y_n = -\varepsilon\, x_{n+1}$$

On a : $x^2_{n+1} + y^2_{n+1} \in [(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^4)\, r^2, (1 + \varepsilon^2)\, r^2]$ si $(x_n, y_n) \in$ cercle.

B. Approche exacte

$$\begin{vmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{vmatrix} = R_\theta \begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_n \cos\theta - y_n \sin\theta \\ y_n \cos\theta + x_n \sin\theta \end{vmatrix}$$

où $x^2_{n+1} + y^2_{n+1} = r^2$

C. Approximation d'un cercle par un polygone à N côtés

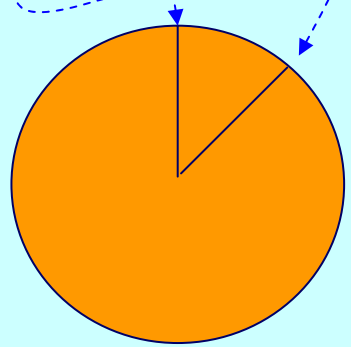
(x_i , y_i) :$(r \cos 2\pi\, i/ N, r \sin 2\pi\, i / N)$,$i= 1, 2, \ldots, N$

sont les sommets du polygone.

Génération d'un arc de cercle

D. Adaptation de l'algorithme de Bresenham

On doit profiter au maximum des propriétés de symétrie d'un cercle.
On considère un octant seulement, celui allant de $(0, R)$ à $(R / \sqrt{2}, R / \sqrt{2})$.
Les autres octants sont générés par simple symétrie.



Le point de départ est donc $(0, R)$.

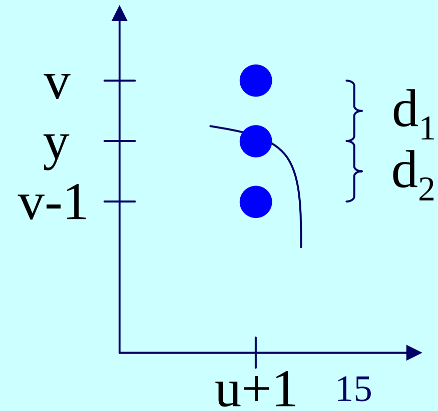
$\forall$ $x = 1, 2, \ldots$ $R / \sqrt{2}$ (jusqu'à ce que $x = y$)

soit (u,v) le dernier point généré,

deux candidats sont possibles : $(u+1,v)$ et $(u+1,v-1)$,

soit y l'ordonnée du point appartenant au cercle dont l'abscisse est $u+1$,

alors $y^2 = R^2 - (u+1)^2$.



On obtient :

$$d_1 = v^2 - y^2 \qquad = v^2 - R^2 + (u+1)^2$$
$$d_2 = y^2 - (v-1)^2 \qquad = R^2 - (u+1)^2 - (v-1)^2$$

Génération d'un arc de cercle

Posons $p(u, v) = d_1 - d_2$

$= 2\,(u+1)^2 + v^2 - 2R^2 + (v-1)^2.$

Si $p(u, v) < 0$ alors choisir $(u + 1, v)$

sinon choisir $(u + 1, v - 1)$.

De plus, on obtient :

Mouvement axial : $p(u+1, v) = p(u, v) + 4u + 6$

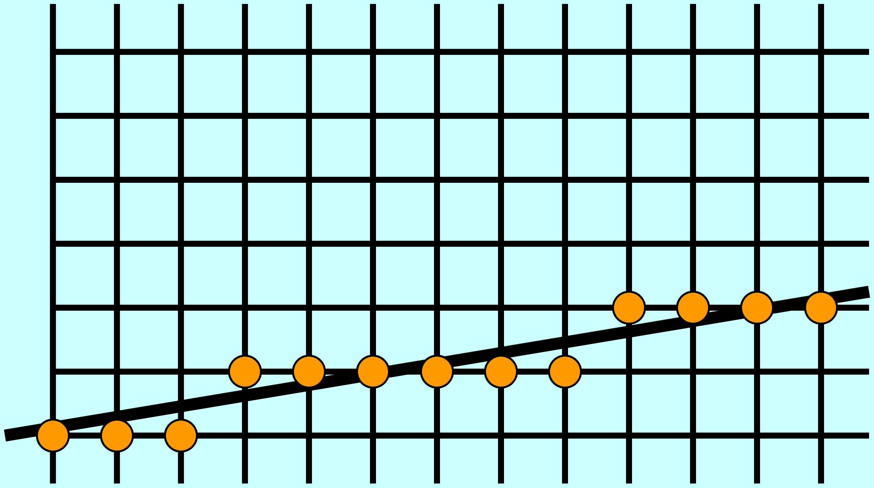
Mouvement diagonal :

$p(u+1, v-1) = p(u, v) + 4(u - v) + 10.$

Élimination de l'effet d'escalier

Élimination de l'effet d'escalier

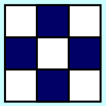
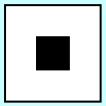
Problème : Les algorithmes de génération de points forment des paliers horizontaux ou verticaux.



Pour éliminer ces effets, plusieurs solutions sont possibles :

1. Faire varier l'intensité lumineuse du point selon sa distance au point théorique.

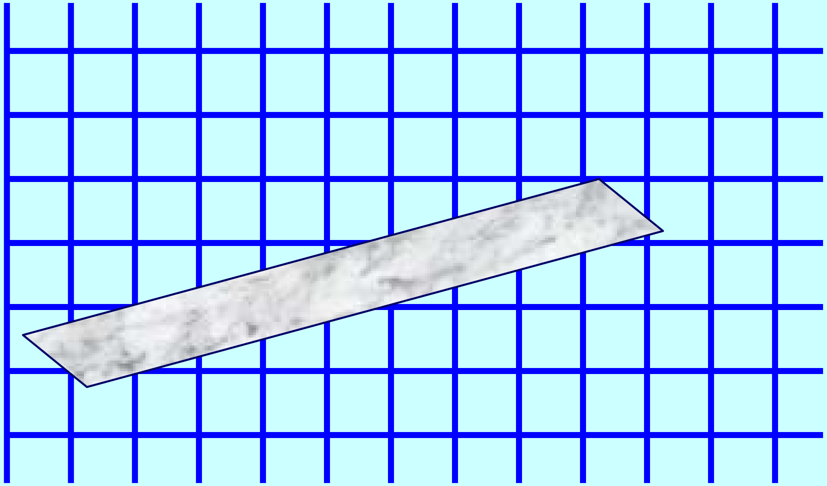
2. Techniques de simulation de grisée :

Ex. : un pixel ↔ une matrice 3 x 3   etc.

D’autres solutions

3. un point à l’écran (pixel) ↔ rectangle

Chaque segment aura donc une largeur de trait, fonction de la dimension du rectangle.



On fixe l’intensité d’une position à l’écran à partir de l’aire de la partie du rectangle recouverte par cette position.

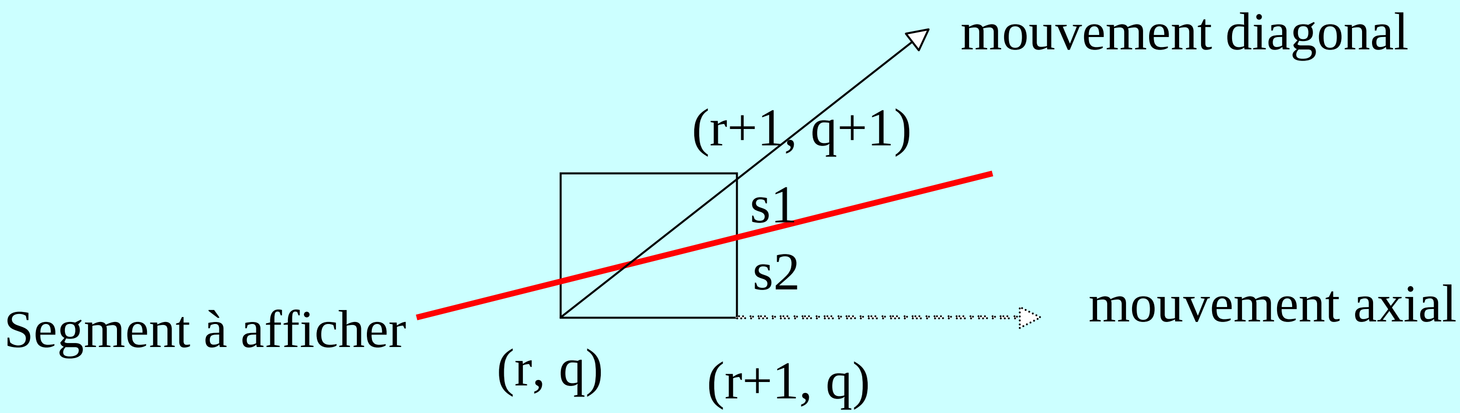
4. On fixe l’intensité globale en fonction de la pente.

5. Utilisation d’un mode de résolution élevée

6. Variante de l'algorithme de Bresenham

Stratégie : à chaque étape, choisir un point principal le plus proche du trait théorique et un point secondaire (l'autre point).

Soit le point courant (r, q) dans le premier octant,



2 alternatives : (r+1, q) et (r+1, q+1)

Le choix se fait toujours en comparant les longueurs s1 et s2 :(on pose s ≡ s2)

si $q+1-s < s-q$ alors effectuer un mouvement diagonal (intensité maximale)
effectuer un mouvement axial (intensité plus faible)

sinon effectuer un mouvement axial (intensité maximale)
effectuer un mouvement diagonal(intensité plus faible)