

# MAT-22257 : Exercices Série 6

**Rappel :** à moins de spécifications contraires, vous devez **toujours pleinement justifier** vos réponses.

## Exercice 1 :

(A) **Sans justifiez vos réponses, dites si les énoncés suivants sont VRAIS ou FAUX.**

- a) une relation asymétrique est toujours antisymétrique et irreflexive. \_\_\_\_\_.
- b) Si  $\rho = \{x, y : \mathbb{N} \mid x < y : \langle x, y \rangle\}$ , alors  $\rho^{-1} = \{x, y : \mathbb{N} \mid x > y : \langle x, y \rangle\}$   
et  $\sim \rho = \{x, y : \mathbb{N} \mid x \geq y : \langle x, y \rangle\}$ . \_\_\_\_\_.
- c) Si  $\theta = \{A, B : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subset B : \langle A, B \rangle\}$ , alors  $\theta^{-1} = \{A, B : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \supset B : \langle A, B \rangle\}$   
et  $\sim \theta = \{A, B : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \supseteq B : \langle A, B \rangle\}$ . \_\_\_\_\_.
- d)  $|\mathbb{N}^{\{0,1\}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ . \_\_\_\_\_.
- d)  $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$  est dénombrable. \_\_\_\_\_.

(B) **Complétez et justifiez brièvement :**

- a) S'il n'existe pas d'application surjective de  $A$  vers  $\mathbb{N}$ , alors  $A$  est \_\_\_\_\_.  
Justification :
- b) S'il n'existe pas d'application surjective de  $\mathbb{N}$  vers  $A$ , alors  $A$  est \_\_\_\_\_.  
Justification :

## Exercice 2 :

- a) Démontrez que l'ensemble de tous les mots *finis* sur l'alphabet  $\{“a”, “b”\}$  est dénombrable alors que l'ensemble de tous les mots *infinis* sur ce même alphabet ne l'est pas.
- b) Est-ce que l'ensemble de tous les mots (*finis et infinis*) sur l'alphabet  $\{“a”, “b”\}$  est dénombrable ? justifiez brièvement.

## Exercice 3 :

Démontrez que l'ensemble de tous les sous-ensembles finis de  $\mathbb{N}$  est dénombrable alors que l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $\mathbb{N}$  ne l'est pas.

## Exercice 4 :

- a) Les données d'entrée et de sortie d'un programme sont des séquences de bits. On peut donc considérer une séquence de bits comme un nombre naturel exprimé en binaire (en ajoutant un bit "1" au début de la séquence, de sorte que les "0" initiaux du programme soient significatifs). Donc un programme calcule une fonction de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$ .

L'ensemble de toutes les fonctions de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$  est-il dénombrable ?

- b) Un programme en JAVA est construit à partir d'un nombre fini de symboles et est de longueur fini. On peut donc considérer un programme comme un mot écrit à l'aide d'un certain alphabet.

L'ensemble de tous les programmes en JAVA est-il dénombrable ?

- c) Si on suppose qu'on n'a aucun problème de mémoire, est-ce que n'importe quelle fonction de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$  peut-être calculée en JAVA ? (Justifiez brièvement.)

**Exercice 5 :** Expliquez brièvement pourquoi  $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$  est non dénombrable.

**Exercice 6 :** Soit l'application  $f$ , définie par  $f : [1, 100] \longrightarrow [0, 1]$   
 $x \longmapsto \frac{x-1}{100}$

- a) Démontrez que  $f$  est injective mais pas surjective.  
b) Peut-on conclure de a) que  $|[1, 100]| \leq |[0, 1]|$  ? Pourquoi ?  
c) Peut-on conclure de a) que  $|[1, 100]| < |[0, 1]|$  ? Pourquoi ?  
d) Est-ce que  $[1, 100]$  est dénombrable ? justifiez