

**Exercice 1 :** Finir les exercices 5 et 6 de la semaine passée.

**Exercice 2 :** Illustrez chacune des propriétés ci-dessous à l'aide de diagramme de Venn et donnez-en une démonstration formelle :

(11.9)  $S = \{x|x \in S : x\}$

(11.49) Distributivité de  $\cap$  sur  $\cup$  :  $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$

(11.53)  $S \subseteq T \equiv S \cup T = T$

(11.57)  $S - T = S \cap \sim T$

(11.64)  $(\forall x| : P \Rightarrow Q) \equiv \{x|P\} \subseteq \{x|Q\}$

**Exercice 3 :** (Vous pouvez faire cet exercice en représentant vos relations par des graphes.)

Étant données les trois relations  $\rho, \sigma, \theta \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$  suivantes :

–  $\rho = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$

–  $\sigma = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle\}$

–  $\theta = \{x, y|x \leq y : \langle x, y \rangle\}$

a) Calculez  $\rho \circ \sigma, \rho^2, \sim \theta$  et  $\theta^{-1}$ .

b) Montrez que pour ce  $\rho$ , ce  $\sigma$  et ce  $\theta$ , les théorèmes (10.23 (a), (c) et (e), ainsi que le théorème (10.33) sont corrects.

c) Déterminez la (ou les) propriété(s) du tableau 10.1 que la relation  $\rho$  satisfait.

d) Même question pour la relation  $\sigma$ .

e) Même question pour la relation  $\theta$ .

f) Existe-t-il un  $n$  pour lequel  $\rho^n = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ ? Si oui, trouvez le plus petit de ces  $n$ .

g) Même question pour la relation  $\sigma$ .

h) Même question pour la relation  $\theta$ .

**Exercice 4 :** (Pour ce numéro, aucune justification n'est demandée.)

Étant données les trois relations  $\rho, \sigma, \theta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  suivantes :

–  $\rho = \{i, j|i + 1 = j : \langle i, j \rangle\}$

–  $\sigma = \rho^+ = (\cup n|0 < n : \rho^n)$

–  $\theta = \{x, y|(\exists z : \mathbb{Z} : 2z = x - y) : \langle x, y \rangle\}$

a) Donnez  $\rho \circ \sigma, \rho^2, \sigma \cup \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}, \sim \theta$  et  $\theta^{-1}$ .

b) Déterminez la (ou les) propriété(s) du tableau 10.1 que la relation  $\rho$  satisfait.

c) Même question pour la relation  $\sigma$ .

d) Même question pour la relation  $\sigma \cup \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}$ .

e) Même question pour la relation  $\theta$ .

### **Exercice 5 : (*Pour fin de réflexion et de discussions*)**

Un hôtel a un nombre infini de chambres (pour chaque entier  $i > 0$ , il y a une chambre portant le numéro  $(i)$ ). L'hôtel est plein (il y a un voyageur dans chaque chambre). Arrive un nouveau voyageur qui voudrait bien dormir à l'hôtel lui aussi. Alors l'hôtelier lui dit qu'il va lui trouver une chambre. Il ne mettra à la porte aucun voyageur, il ne mettra pas deux voyageurs dans une même chambre et il ne fera pas construire une nouvelle chambre. Alors comment l'hôtelier fera-t-il ?