Pourquoi probabilités en robotique?

- Pour tenir compte de l'incertitude/bruit liées
  - aux mesures des capteurs
  - aux déplacements du robot
  - méconnaissance de l'environnement

- Utiliser des **variables aléatoires** pour
  - les mesures (z)
  - les actions (u)
  - l'état du robot (X ou x)

Variable aléatoire

- Variable qui peut prendre des valeurs au hasard, définies dans un **espace discret** ou **continu**, selon des lois de probabilité.
- Commençons par **espace discret**

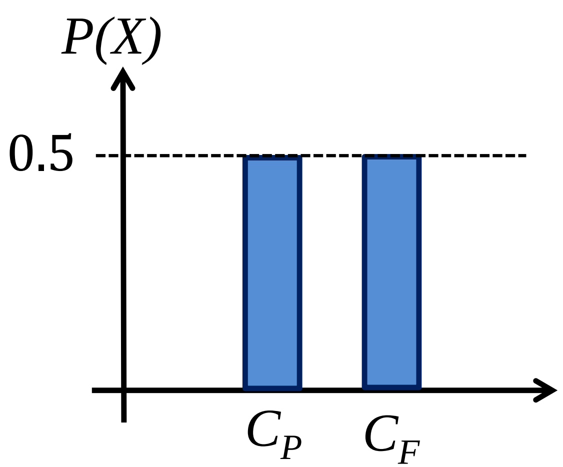
$$\text{variable } X \in \{C_P, C_F\}: \text{ pièce de monnaie}$$

$$D \in \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}: \text{ dé à 6 faces}$$

Variable aléatoire

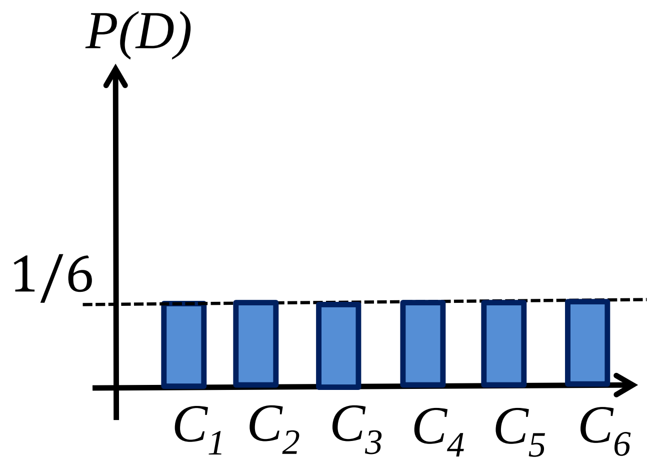
- On attribue une probabilité à chacun des **événements**

$$P(X = C_P) = P(X = C_F) = 0.5$$

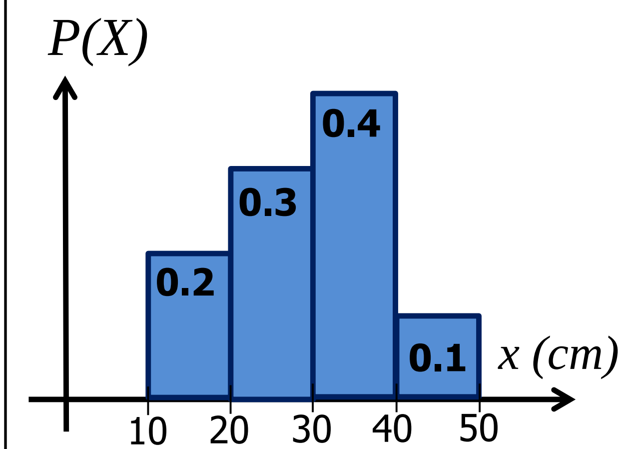


pièce de monnaie

$$P(D = C_1) = \frac{1}{6}, P(D = C_2) = \frac{1}{6}, \text{etc.}$$



dé à six faces



intervalle sur position du robot

Propriétés des probabilités

- Probabilités sont toujours positives

$$\boxed{P(X = C_i) \geq 0}$$

- La somme de la probabilité de tous les événements possibles est 1

$$\boxed{P(X = C_1) + P(X = C_2) + ... = 1}$$

Variable aléatoire continue

- L'espace de valeur est souvent **continu**
  - grandeur d'une personne
  - voltage du capteur pour une position x du robot
  - estimé de la position x du robot

- Travaille surtout en **continu** en robotique mobile

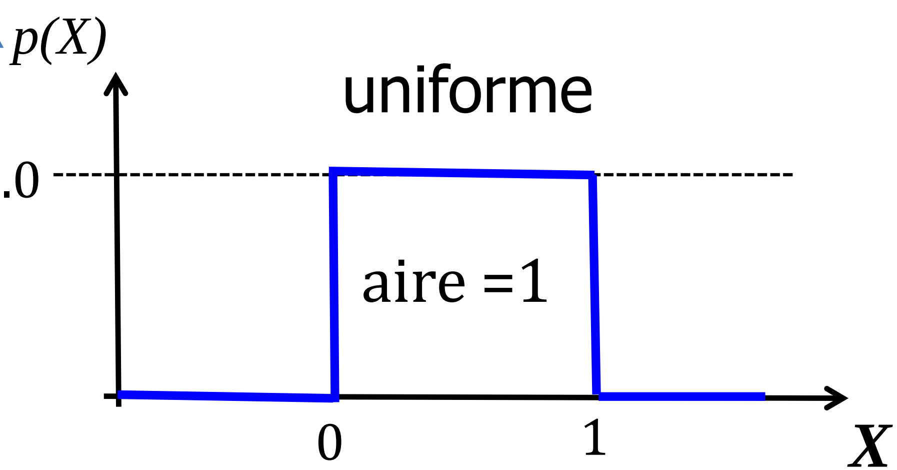
Variable aléatoire continue

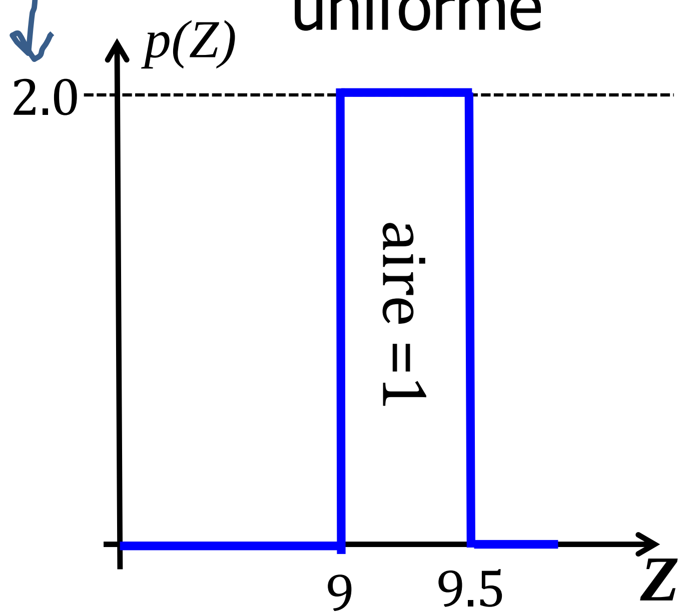
- Associe une **distribution** (fonction) des probabilités pour X
- densité $p(X)$
- Aire totale = 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(X)\,dX = 1$$

pdf* peut dépasser 1

lettre minuscule





**pdf = probability density function*

Distribution Gaussienne 1 dimension

- Entièrement décrite par 2 paramètres : μ et σ.

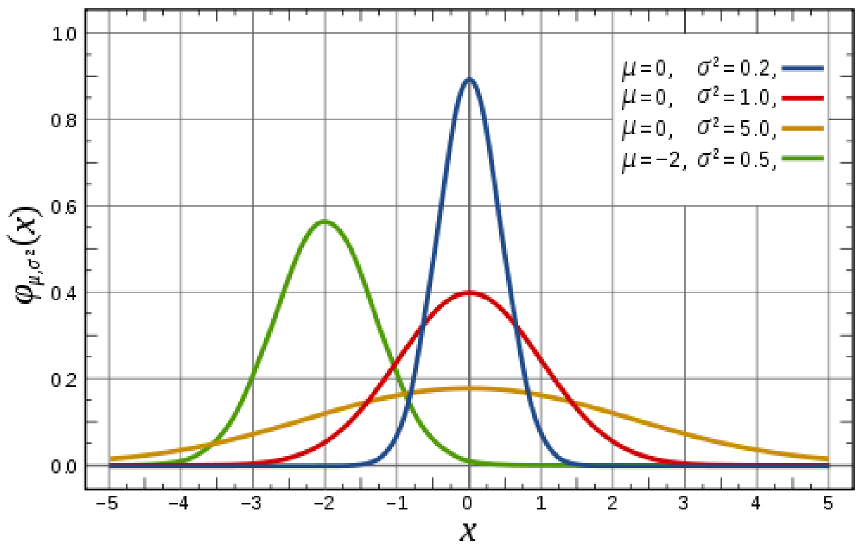
μ : moyenne

σ : écart-type

e = 2,7182818284590…

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

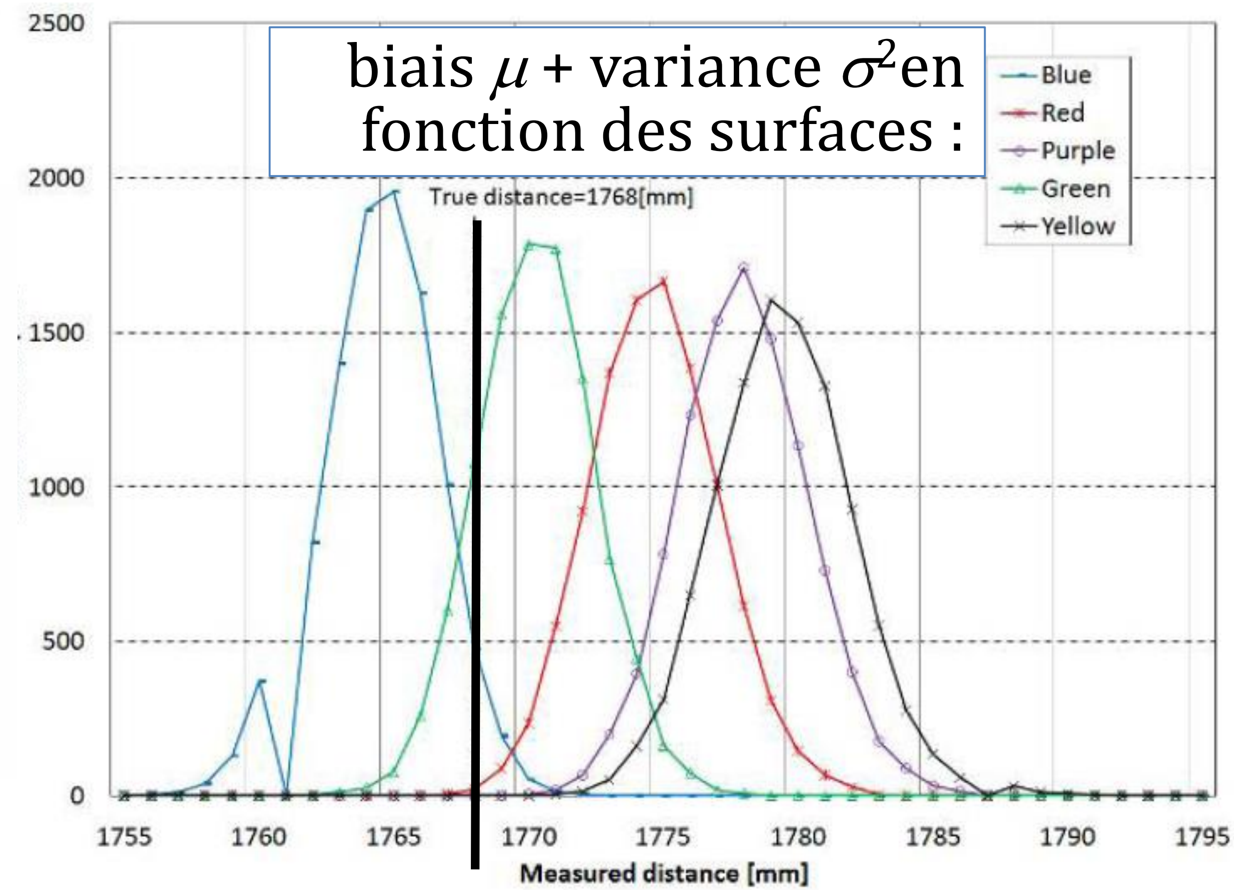
constante de normalisation (intégrale == 1)



(autre nom : distribution normale)

Exemple en robotique

- Décrit bien le bruit sur un grand nombre de capteur



Characterization of the Hokuyo URG-04LX Laser Rangefinder for Mobile Robot Obstacle Negotiation

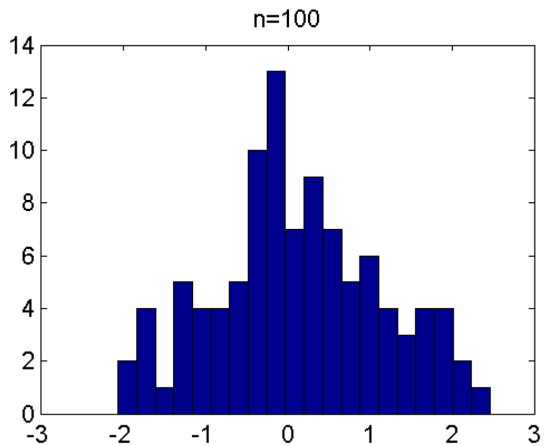
Yoichi Okubo*, Cang Ye**, and Johann Borenstein*

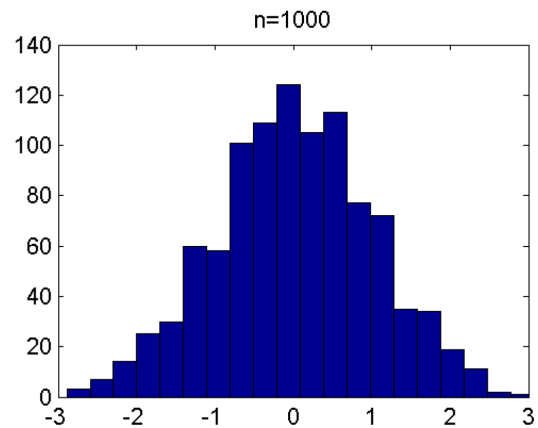
Exemple avec matlab

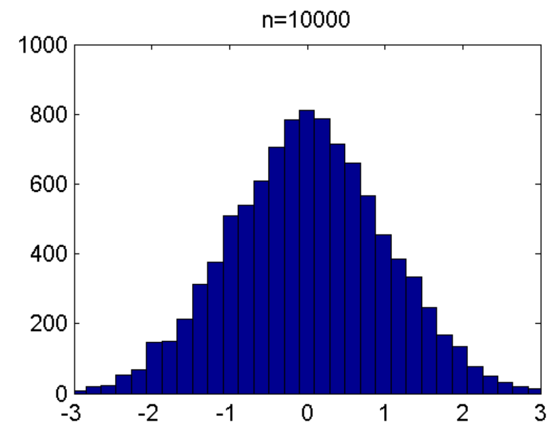
- **randn**
- **hist**

faire bien attention!!! la commande **rand** existe

```
n = 10000;
x = randn(1,n); % aléatoire Gaussienne
hist(x,40)       % 40 = nombre de "bin"
xlim([-3 3]);    % limite en abscisse
title(sprintf('n=%d',n));
```



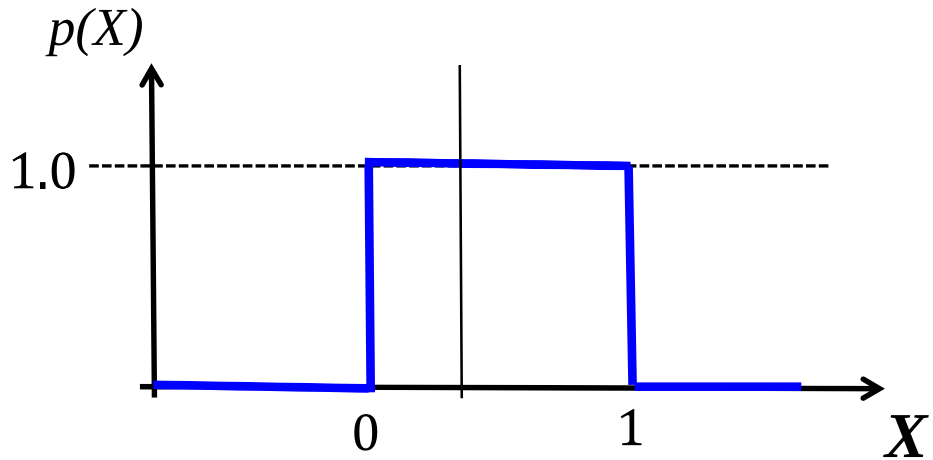




plus n est grand, plus on s'approche de la distribution véritable

Variable aléatoire continue

- Quelle est la probabilité d'avoir X=0.3449242?



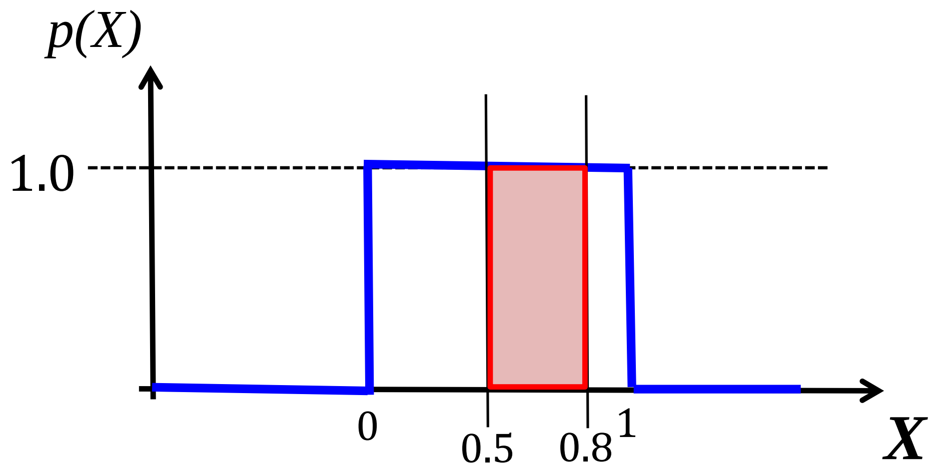
$$P(X=0.3449242) = 0$$

(il y a une infinité de nombres réels entre 0 et 1 : ensemble non dénombrable)

Variable aléatoire continue

- Probabilité : aire sous la courbe ***p(X)*** entre deux bornes

$$P(0.5 \le X \le 0.8) = \mathbf{0.3}$$

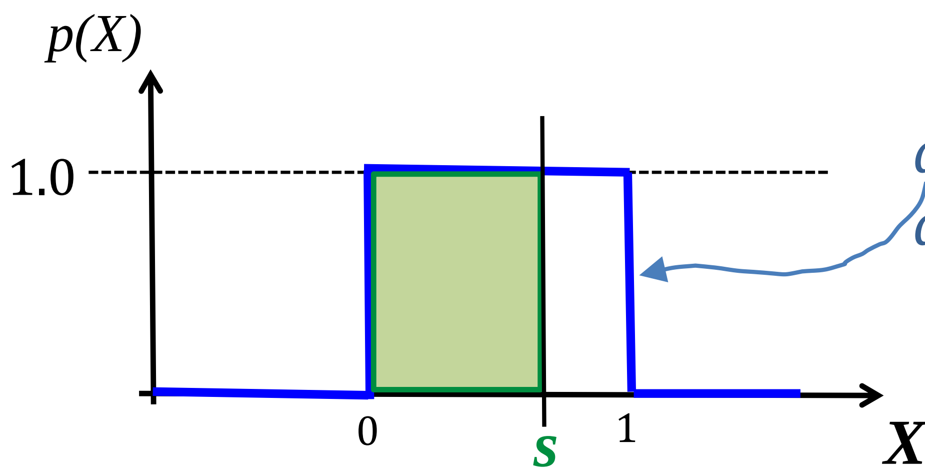


Générer un évènement au hasard

- Avec *matlab* (ou autre langage), comment générer un évènement avec probabilité ***s***?

génère un nombre entre 0.0 et 1.0, distribution uniforme

```
if (rand()< s)
    l'événement se produit
else
    l'événement ne se produit pas
end
```



distribution uniforme de **`rand()`**

Distribution pour plus d'une variable $P(A,B)$

- Probabilité que deux événements se produisent

$$P(x, y) = P(X = x \text{ et } Y = y)$$

- Appelé probabilité **jointe**

Modèle de la météo au Québec

- 2 variables aléatoires discrètes
  - Température T={C,F}
  - Météo M = {N, PN} (neige ou pas)

P(C,N) = 0.001

	C	F
N	0.001	0.2
PN	0.399	0.4

Table des probabilités jointes (discrets)

- La taille dépend
  - du nombre de variable
  - du nombre d'état par variable
- Cas simple :
  - x_i est variable binaire Vrai/Faux
  - $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - # d'entrée = $O(2^n)$ → croissance exponentielle ☹
  - # d'exemple exponentiel pour « tuner » la table ☹
- Raisonnement similaire pour continu
- On cherche donc à les éviter

Indépendance

- Si deux événements sont indépendants, alors

note: $P(A \cap B)$ est la même chose

$$\boxed{\underbrace{P(A,B)}_{\text{la probabilité que A et B se produisent}} = \underbrace{P(A)P(B)}_{\text{... est égale à la probabilité que A se produise, multiplié par la probabilité que B se produise.}}}$$

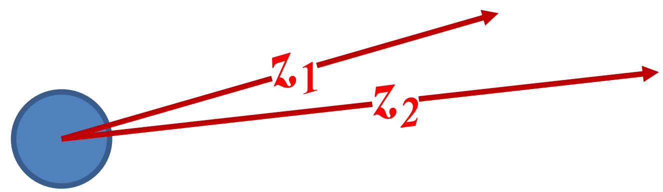
- Simplifie les maths ☺
- ***User*** et ***abuser*** en robotique mobile
  - pour avoir un résultat calculable en un temps raisonnable!

Exemple d'indépendance « abusée »

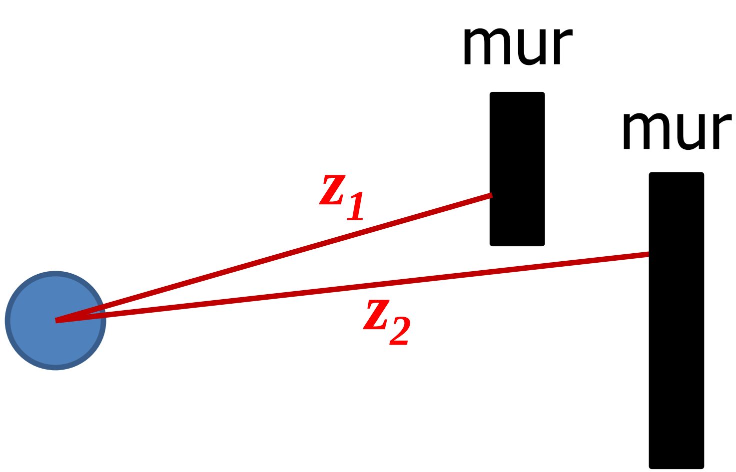
- Deux mesures distances z_1 et z_2 avec LiDAR

$$P(z_1, z_2) = P(z_1)P(z_2)$$

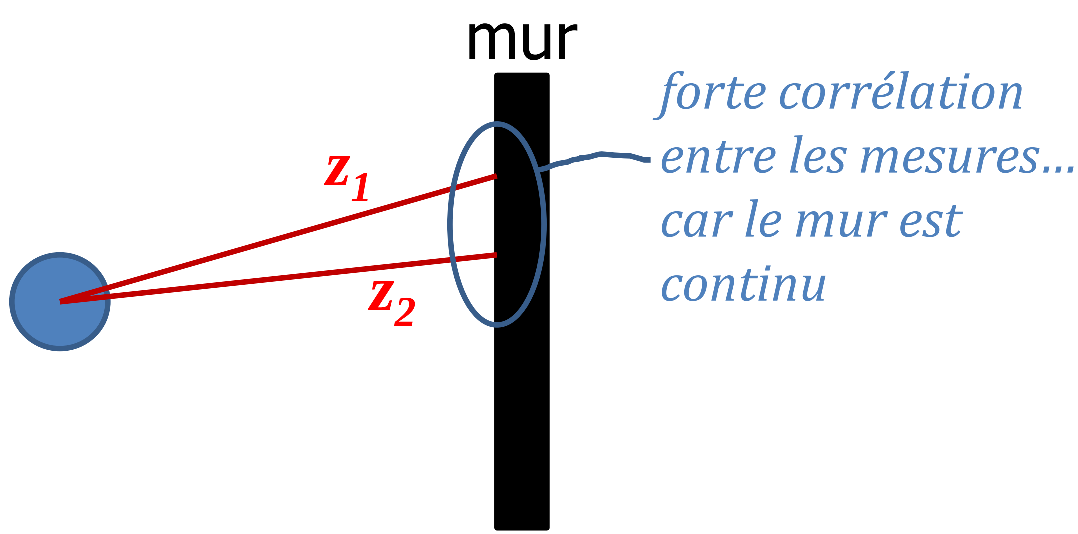
indépendants



- Rarement vrai…



indépendant : oui



indépendant : pas tout à fait…

Université Laval

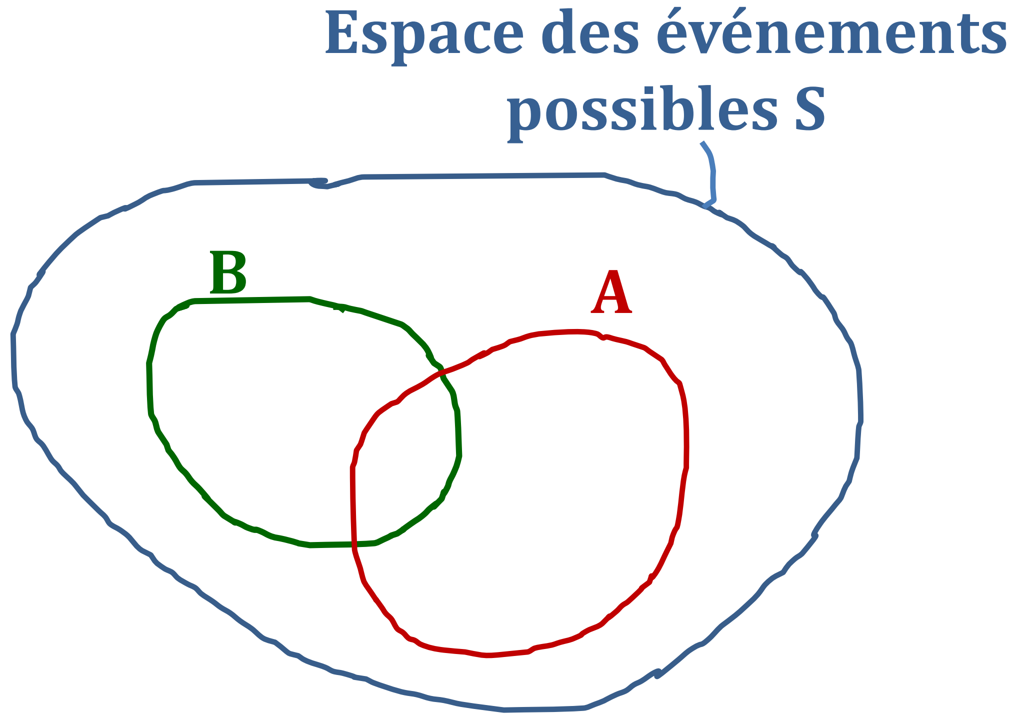
Probabilités conditionnelles $P(A|B)$

- *Parfois*, une variable aléatoire nous renseigne sur une autre
- De l'exemple sur la météo :
  - si je vous dis qu'il fait chaud, vous savez fort probablement qu'il ne neige pas
  - si je vous dis qu'il neige, alors vous pouvez inférer qu'il fait probablement froid
- S'il y a dépendance entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$:
  - signifie que de l'information sur $\boldsymbol{A}$ nous donne (un peu? beaucoup?) de l'information sur $\boldsymbol{B}$, et vice-versa (bon!)
  - complexifie les calculs (pas bon!)

Probabilités conditionnelles $P(A|B)$

- Pour décrire la probabilité que l'événement A se produise, si l'événement B s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$

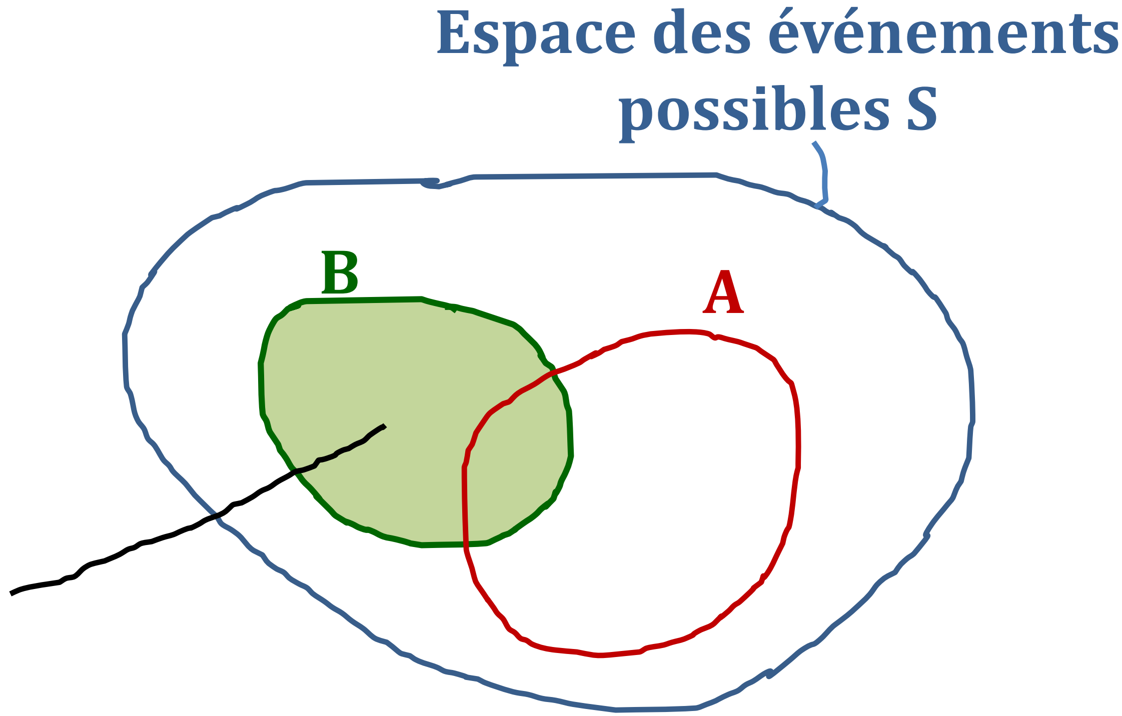


probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités conditionnelles

- Pour décrire la probabilité que l'événement A se produise, si l'événement B s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$

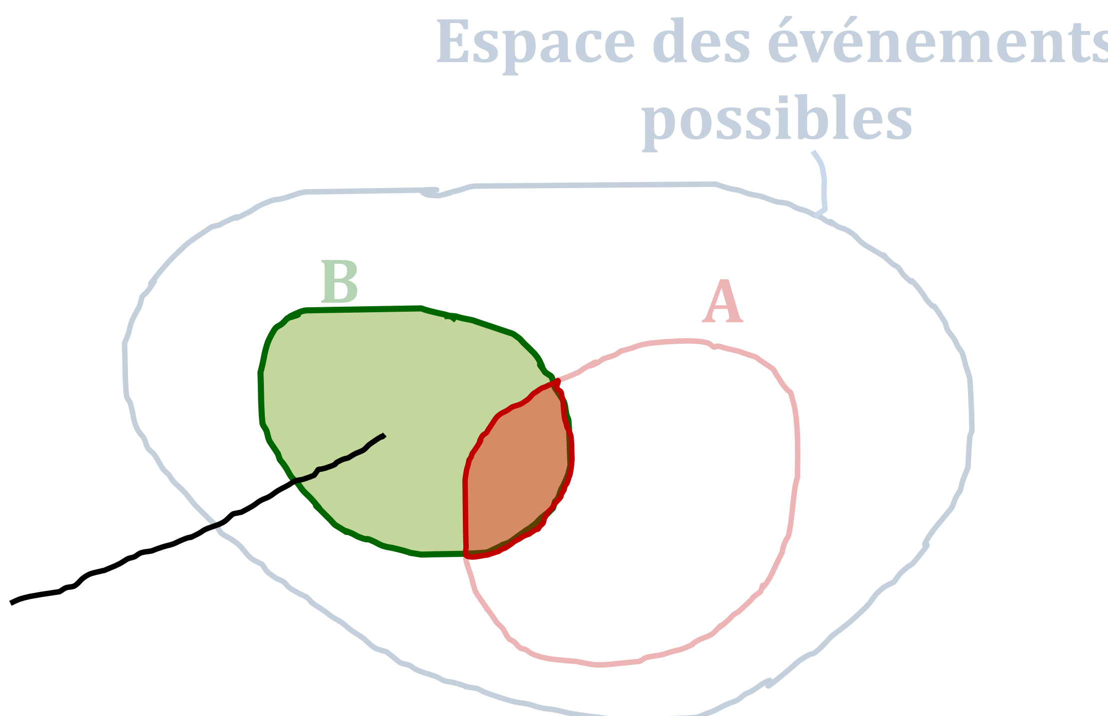


probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités conditionnelles

- Pour décrire la probabilité que l'événement A se produise, si l'événement B s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$



Événement **B** s'est produit

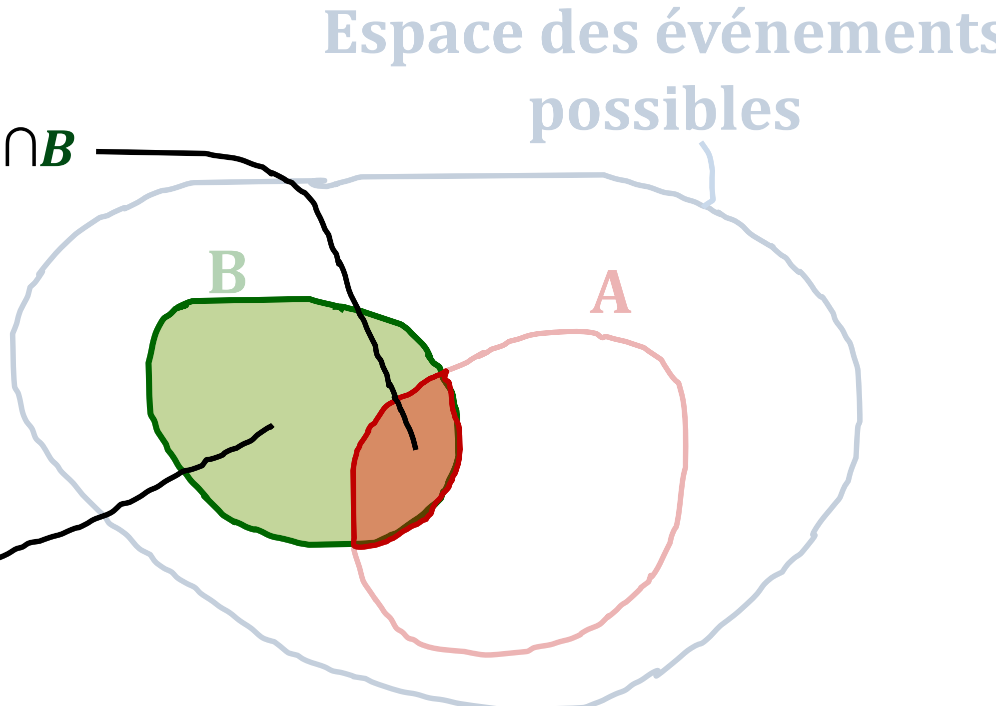
probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités conditionnelles

- Pour décrire la probabilité que l'événement A se produise, si l'événement B s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$

Événement **A** et **B** se sont produits : $A \cap B$



Événement **B** s'est produit

probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités conditionnelles

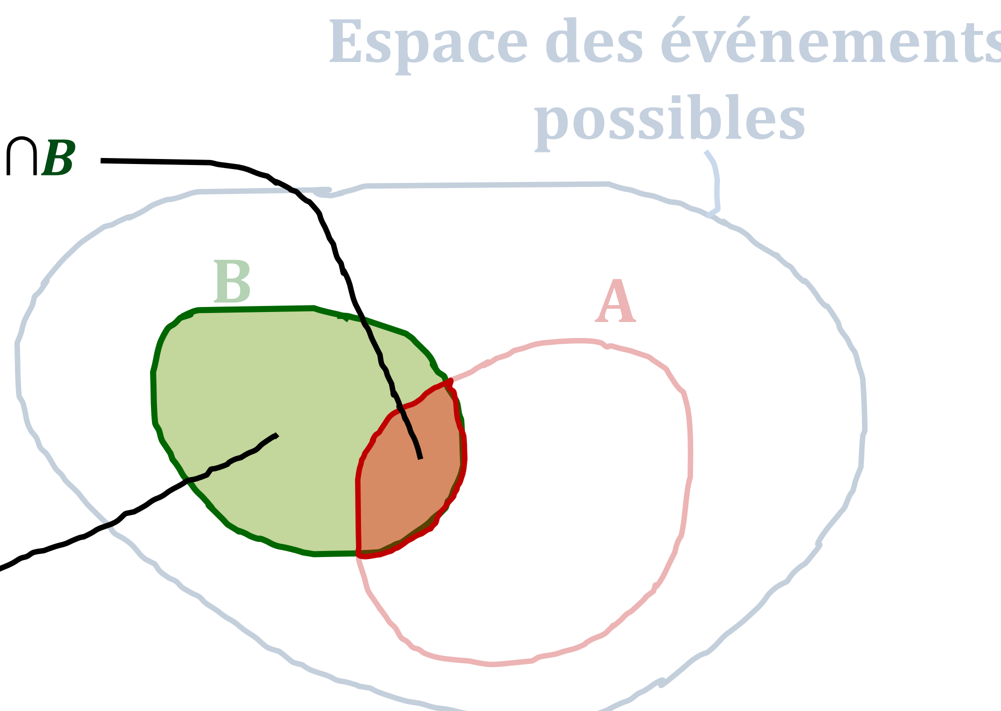
- Pour décrire la probabilité que l'événement ***A*** se produise, si l'événement ***B*** s'est déjà produit.

$$P(A|B)$$

Événement ***A*** et ***B*** se sont produits : $A \cap B$

$$\boxed{P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A, B)}{P(B)}}$$

Événement ***B*** s'est produit



probabilité est proportionnelle à l'aire

Probabilités jointes/conditionnelles

Probabilité conditionnelle

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}}$$

Probabilité jointe

$$\underbrace{P(A,B)}^{\textit{probabilité d'avoir } \mathbf{A} \textit{ et } \mathbf{B}} = \underbrace{P(A \mid B)}_{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } \mathbf{A}\textit{, si } \mathbf{B} \\ \textit{est déjà arrivé}}} \overbrace{P(B)}^{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } \mathbf{B}}}$$

Probabilités jointes/conditionnelles

Probabilité conditionnelle

Probabilité jointe

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}}$$

Aussi : $\boldsymbol{P(A, B) = P(B, A)}$

$$\overbrace{\boldsymbol{P(A,B)}}^{\textit{probabilité d'avoir } A \textit{ et } B} = \underbrace{\boldsymbol{P(A \mid B)}}_{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } A\textit{, si } B \\ \textit{est déjà arrivé}}} \overbrace{\boldsymbol{P(B)}}^{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } B}} = \underbrace{\boldsymbol{P(B \mid A)}}_{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } B\textit{, si } A \\ \textit{est déjà arrivé}}} \overbrace{\boldsymbol{P(A)}}^{\substack{\textit{probabilité} \\ \textit{d'avoir } A}}$$

Théorème probabilité totale

$$P(A) = \sum_n P(A, B_n) = \sum_n P(A \mid B_n) P(B_n)$$

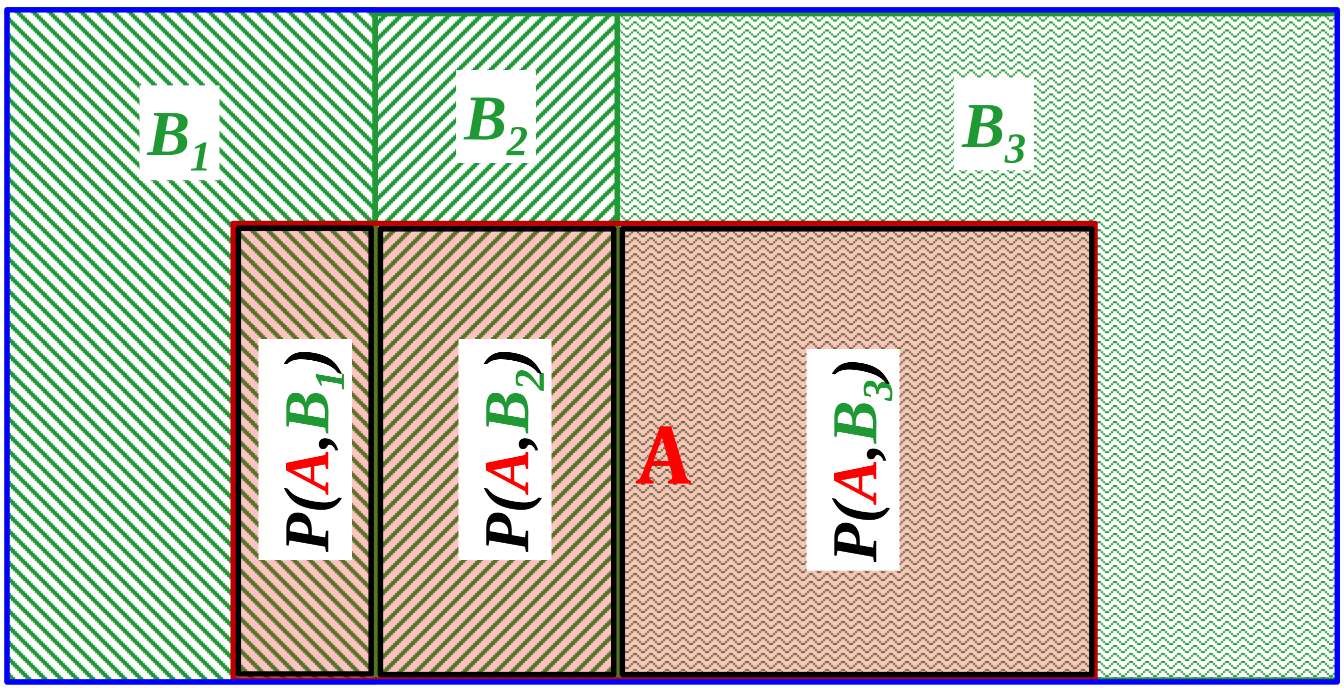
Théorème probabilité totale

$$P(A) = \sum_n P(A, B_n) = \sum_n P(A \mid B_n) P(B_n)$$

exemple $B \in \{B_1, B_2, B_3\}$

$$P(A) = P(A, B_1) + P(A, B_2) + P(A, B_3)$$

Ensemble de tous les événements



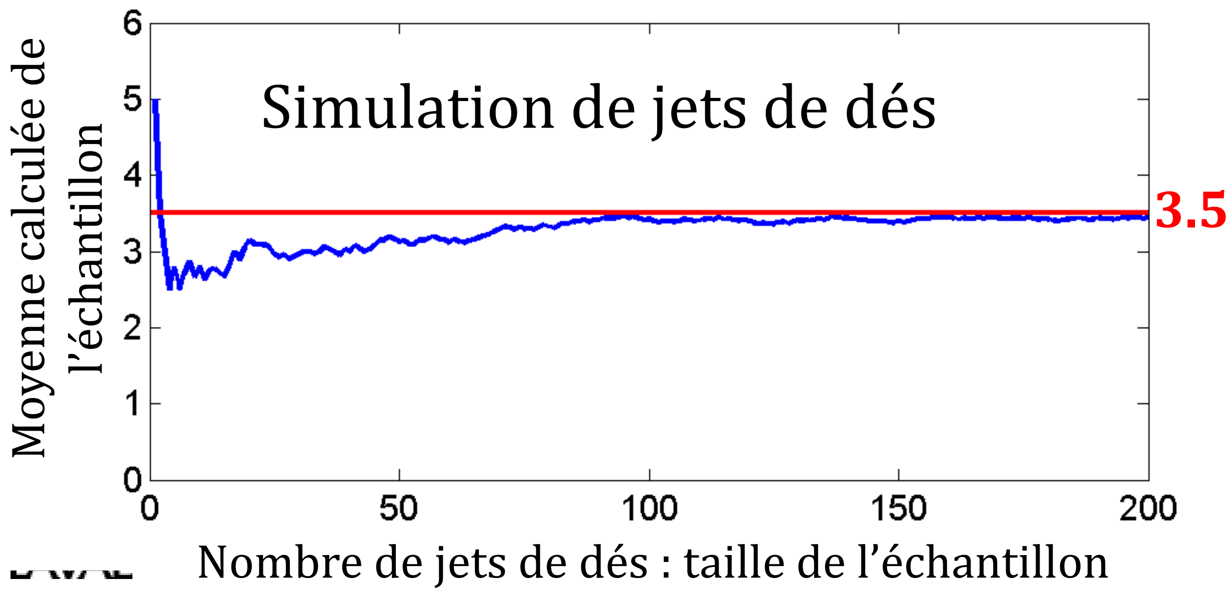
Espérance E[] (valeur moyenne)

- La valeur moyenne d'une variable aléatoire…

$$E[X] = \sum xP(x) \quad \textit{pour le cas discret}$$

- Pour l'exemple du dé :

$$E[X] = \frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}2 + \frac{1}{6}3 + \frac{1}{6}4 + \frac{1}{6}5 + \frac{1}{6}6 = \frac{21}{6} = 3.5$$



***Loi des grands nombres** : les caractéristiques statistiques d'un échantillon se rapproche des caractéristiques statistiques de la population à mesure que la taille de l'échantillon augmente*

Espérance $E[]$ (valeur moyenne)

- La valeur moyenne d'une variable aléatoire…

$$E[X] = \int xp(x)dx \quad \textit{pour le cas continu}$$

- Pour une gaussienne $\quad E[g(x)] = \mu$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Variance Var()

- Mesure « l'étendue » d'une distribution

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma_X^2$$

(σ_X est l'écart-type, donc la racine carrée de la variance)

$$\boxed{Var(X) = \sum_x P(x)(x-\mu)^2 \quad \textit{pour le cas discret}}$$

$$\boxed{Var(X) = \int p(x)(x-\mu)^2 dx \quad \textit{pour le cas continu}}$$

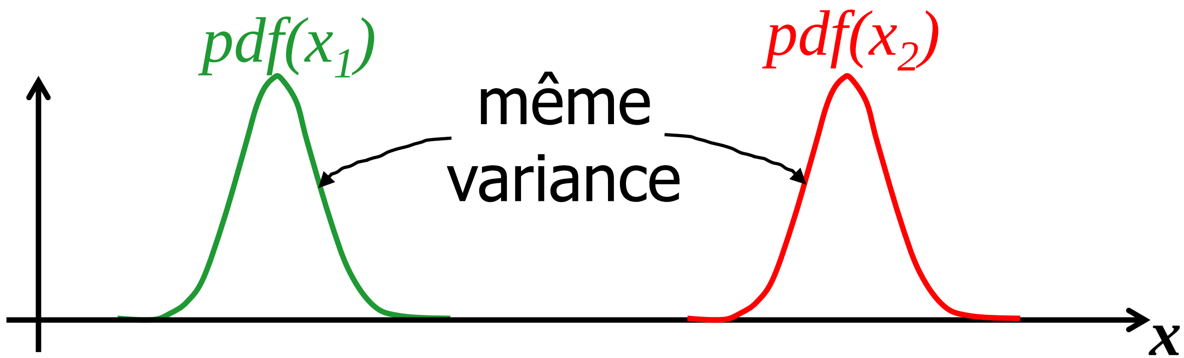
Variance d'une gaussienne est σ^2

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Propriétés de la variance

- Une constante ne joue pas dans la variance

$$Var(aX+b)=Var(aX)=a^2Var(X)$$



- Somme de deux variables aléatoires X et Y

$$Var(aX+bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2ab\underbrace{Cov(X,Y)}_{\text{égale à 0 si X,Y sont indépendantes}}$$

Modèle de capteurs probabiliste

Modéliser un capteur : déterministe

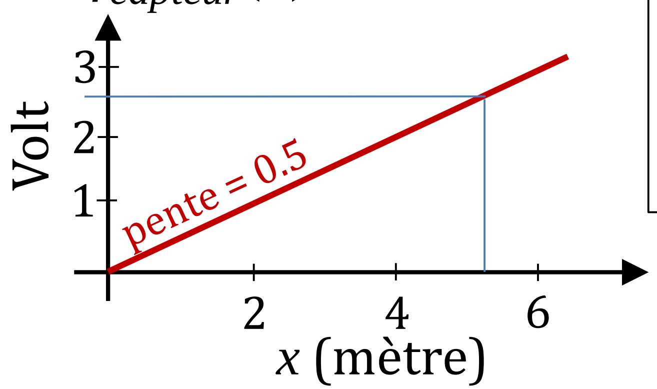
- Modèle déterministe
  - pas de bruits

    $z = f_{capteur}(x)$
- Si le système (x) ne change pas, z reste constant entre les mesures

Exemple : télémètre laser

Cas : capteur déterministe sans bruit

$z=f_{capteur}(x)=0.5x$



Pourquoi des Volts? Pour bien montrer que je n'ai pas besoin d'avoir les mêmes unités pour x et z.

Prend des mesures

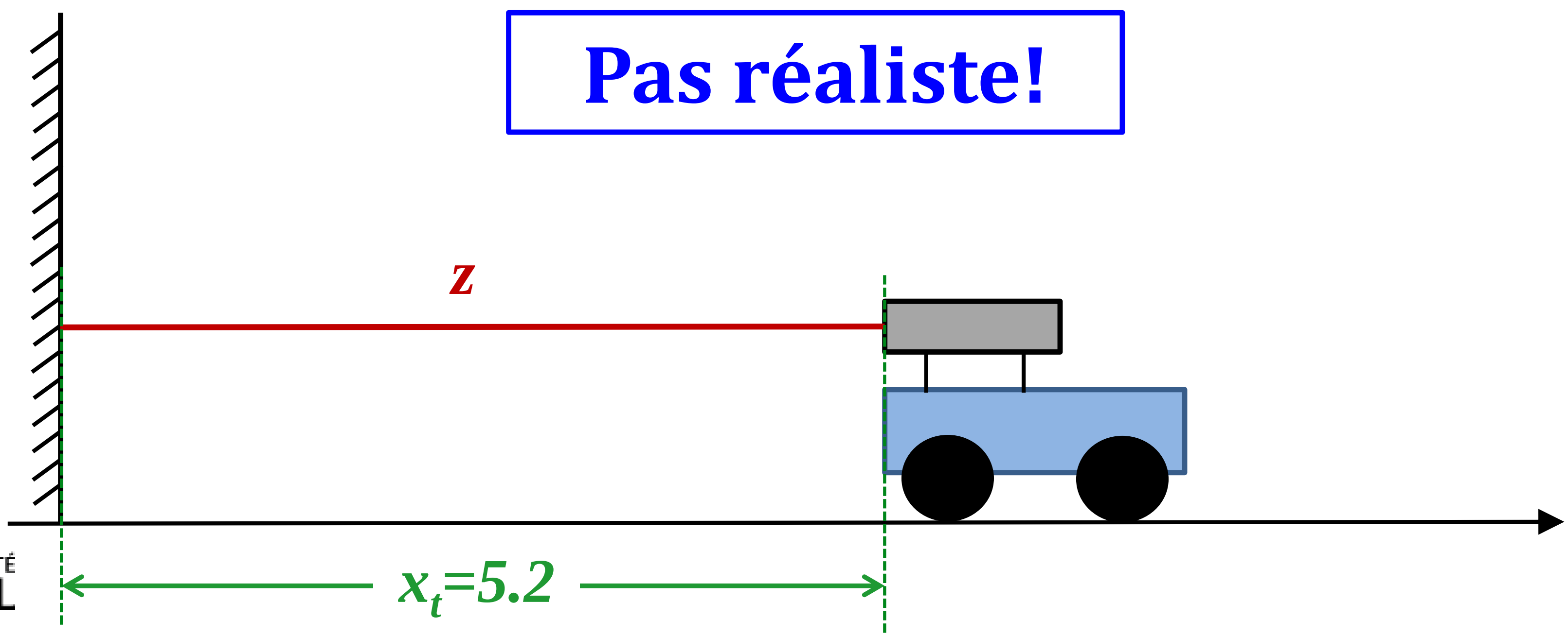
z_1 = **2.60** Volt

z_2 = **2.60** Volt

z_3 = **2.60** Volt

z_4 = **2.60** Volt

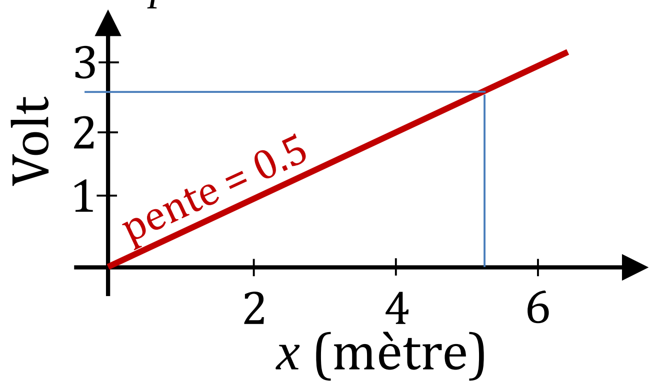
Pas réaliste!



Exemple : télémètre laser

Cas : Réalité

$z=f_{capteur}(x)=0.5x$



Prend des mesures

z_1 = **2.63** Volt

z_2 = **2.45** Volt

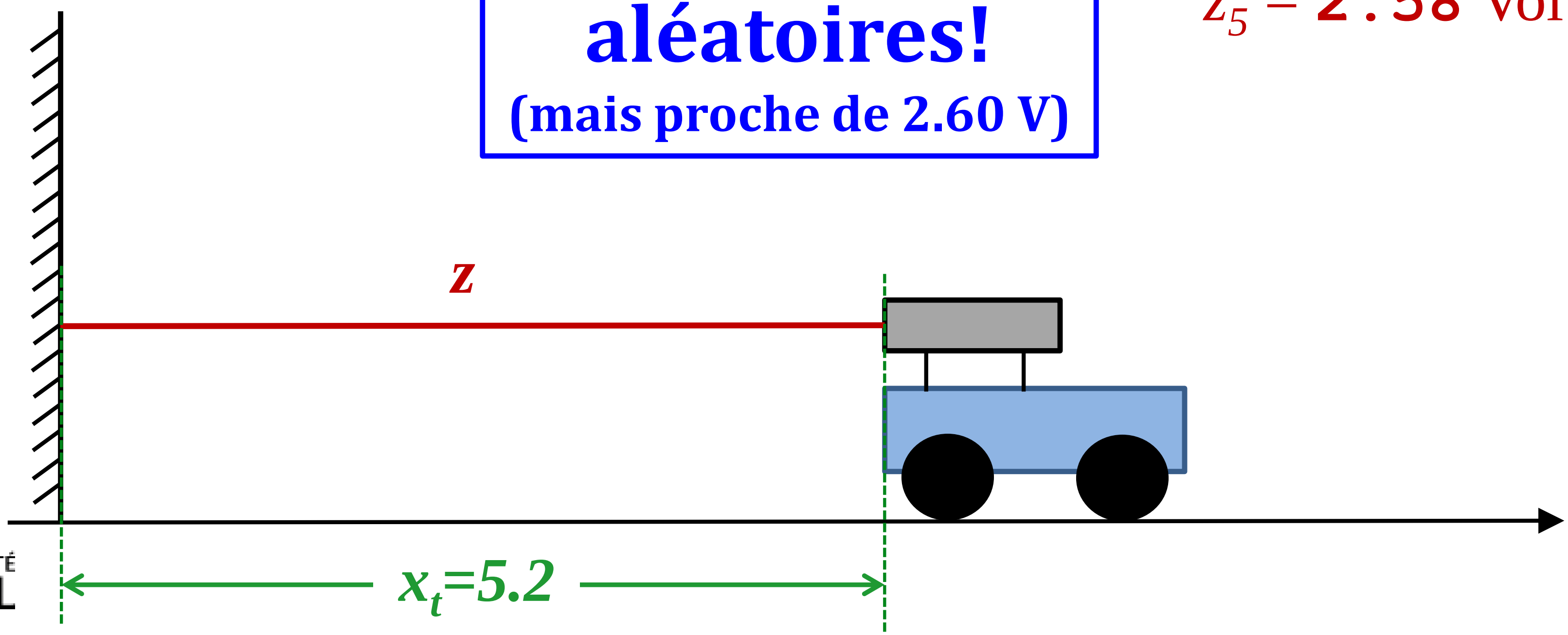
z_3 = **2.74** Volt

z_4 = **2.71** Volt

z_5 = **2.58** Volt

Résultats partiellement aléatoires!

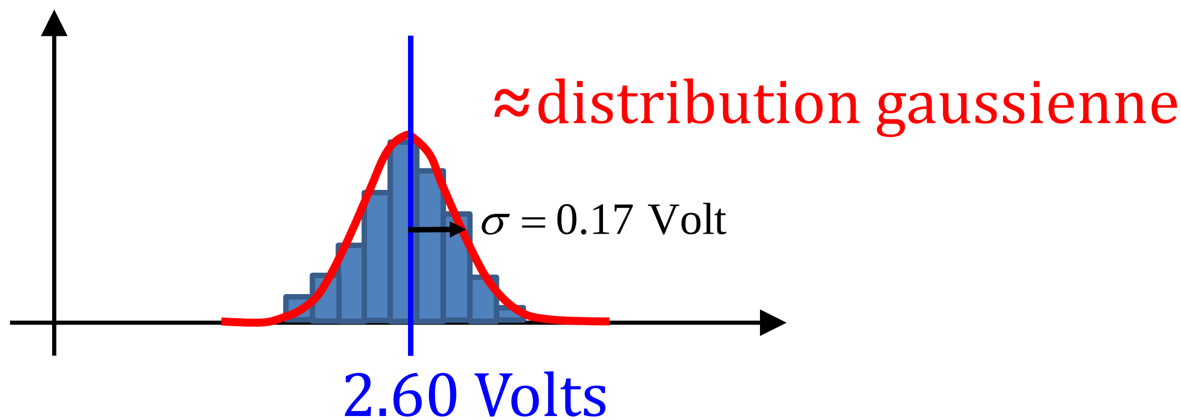
(mais proche de 2.60 V)



Exemple : télémètre laser

- Si on prend beaucoup de mesures z (1,000+ mesures)
- Distribution de z_i (fonction `hist` dans matlab)

histogramme des mesures z_i



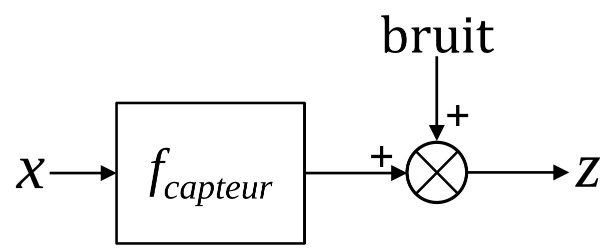
pige dans une distribution…

avec moyenne…

$$\boxed{z \sim N(f_{capteur}(x), \sigma_{capteur}^2)}$$

normale…

et variance



Modéliser un capteur : probabiliste

- Monde est rempli de bruits
  - interférence électromagnétique
  - vibrations
  - bruit de grenaille (shot noise)
  - bruit thermique
  - bruit en créneaux
  - bruit de quantification
  - etc…

réalité physique

- Modèle probabiliste : **capteur est une distribution**

déterministe $z = f_{capteur}(x)$ ➡ ***probabiliste*** $p(z|x)$ ← l'art de bien modéliser un capteur…

Quelle est la prob. d'une mesure z

sachant l'état x du système

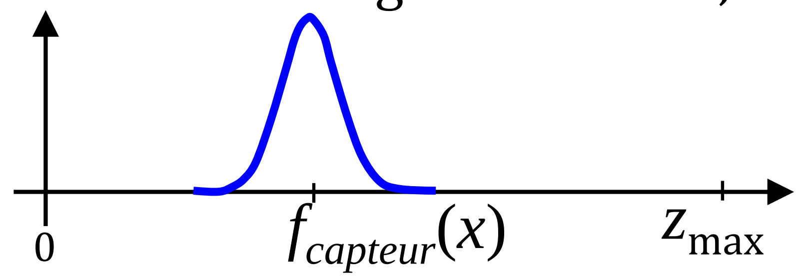
Exemple précédent $z = 0.5x$ $z \sim N(0.5x, 0.17^2)$

Exemple de modélisation

- Soit un capteur qui :

A) 80% du temps retourne une mesure valide mais bruitée gauss. σ=0.25;

$$p_{valide}(z \mid x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z - f_{capteur}(x))^2}{2\sigma^2}}$$



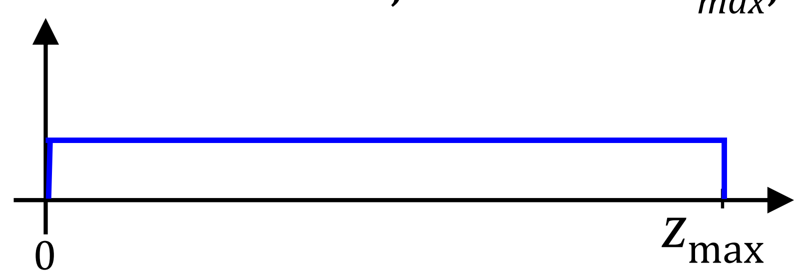
B) 15% du temps manque la cible et retourne la valeur maximale z_{max};

$$p_{manque}(z \mid x) = \delta(z - z_{\max})$$

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

C) 5 % du temps donne une valeur complètement aberrante, entre 0 et z_{max};

$$p_{aberr}(z \mid x) = \frac{1}{z_{\max}}$$



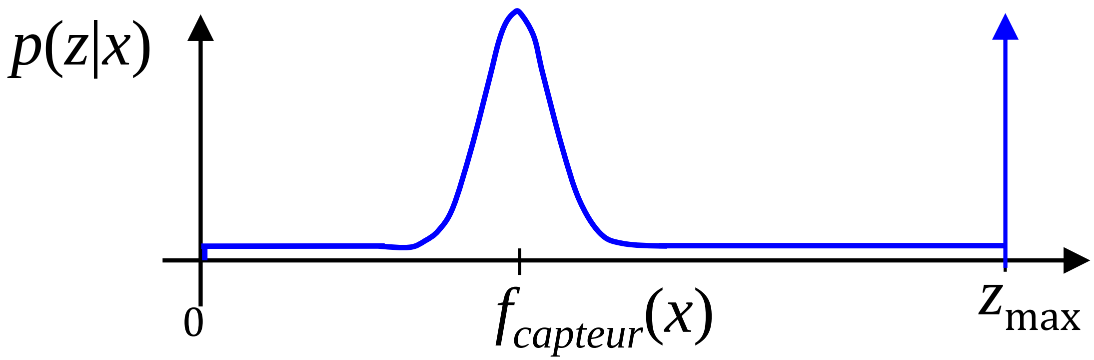
UNIVERSITÉ LAVAL

δ( ) : voir http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

Exemple de modélisation

- Notre capteur au complet :

$$p(z \mid x) = 0.80\, p_{valide}(z \mid x) + 0.15\, p_{manque}(z \mid x) + 0.05\, p_{abber}(z \mid x)$$



- La distribution $p(z|x)$ encode les trois modes d'opération du capteur!
- Va nous permettre
  - simuler un capteur (très utile)
  - faire de l'inférence $z \rightarrow x$ (prochaine section…)