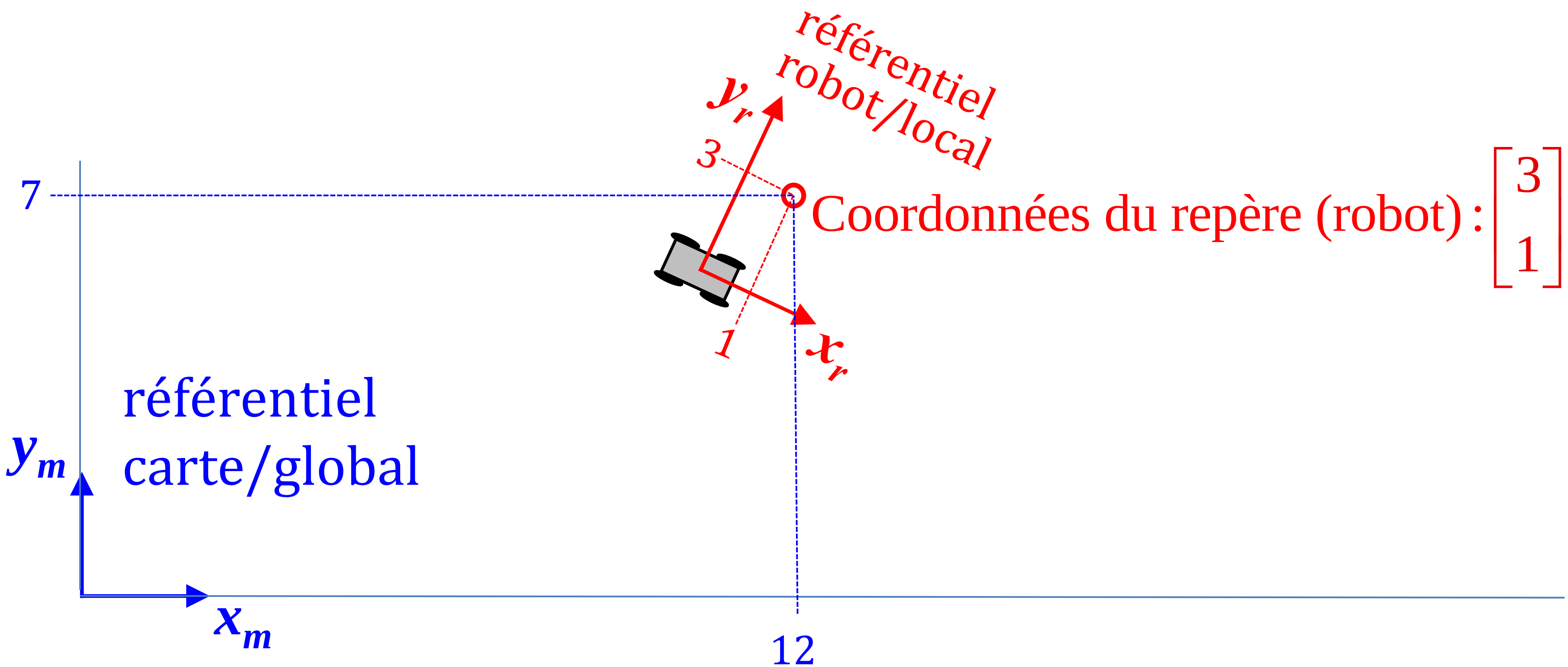
Transformations géométriques : rotation et translation

Repères

- En robotique, on doit constamment transférer des points d'un référentiel à un autre



Coordonnées globales du repère : $\begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$

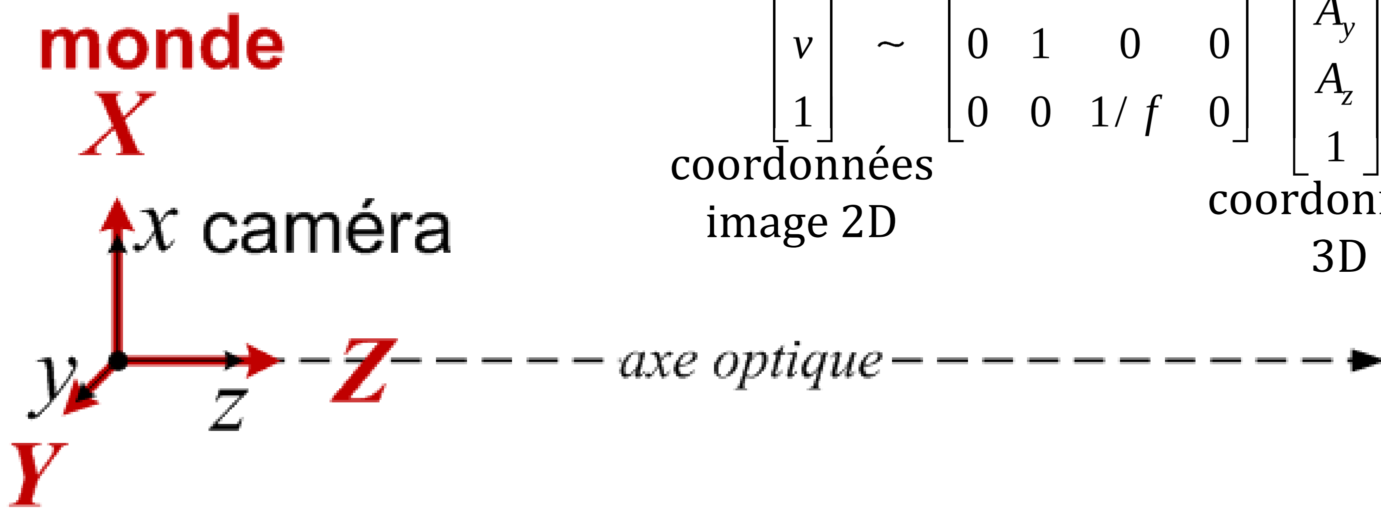
Autre exemple : caméra

- Si les objets sont directement en coordonnées de la caméra, on peut facilement calculer une image

$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}} \overset{\sim}{\sim} \overset{P}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ 1 \end{bmatrix}}$$

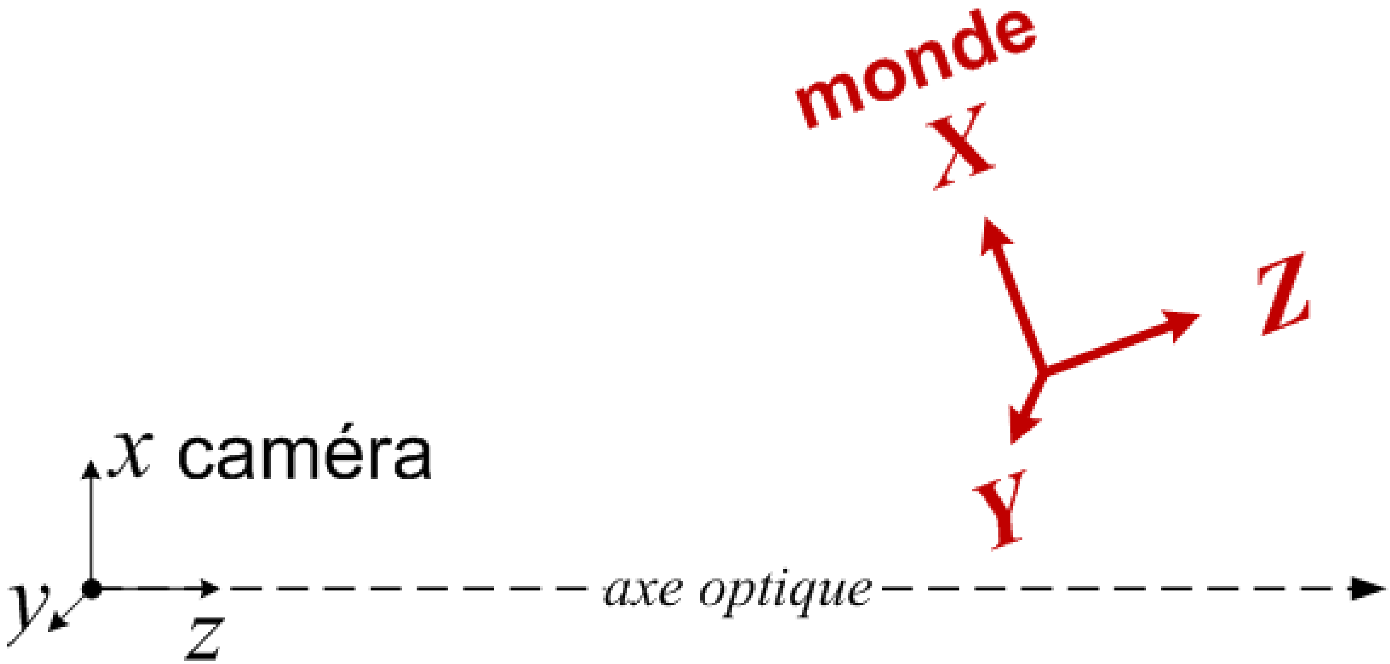
coordonnées image 2D

coordonnées 3D



Autre exemple : caméra

- Mais la caméra est sur le robot, qui se déplace…
  le référentiel du monde (global) ≠ référentiel caméra

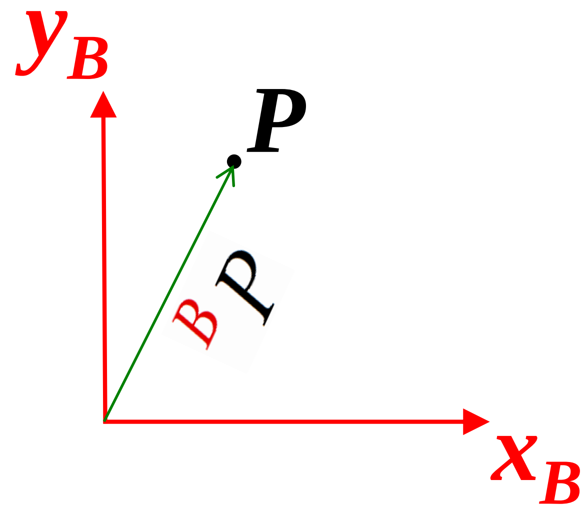


- Il faut donc être capable d'exprimer un même point dans plusieurs référentiels, et de passer d'un à l'autre facilement.

Convention sur la notation

- Point P défini dans le repère B :

$$^{B}P$$



- Position de P est un vecteur partant de l'origine de B, selon les axes de B, et se terminant à P

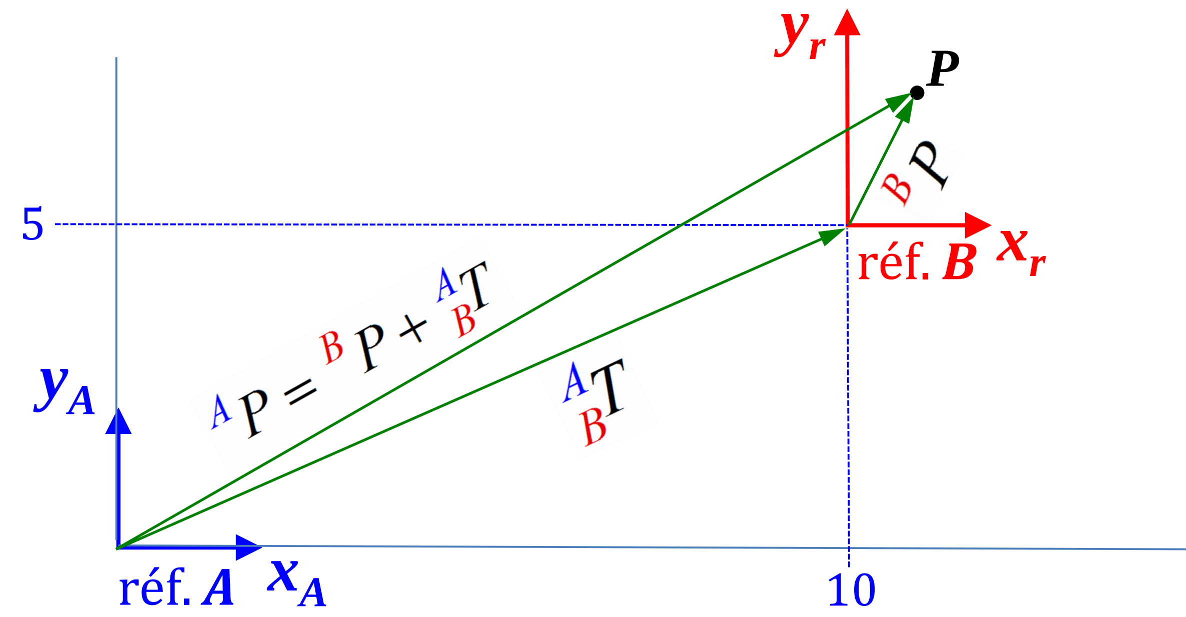
Transformation pour repères translatés

- L'origine de *B* est situé à la coordonnée (10,5) dans le repère *A* : ${}^{A}_{B}T$
- La position de ***P***, exprimée dans le repère *A*, est donc l'addition des deux vecteurs ${}^{A}_{B}T$ et ${}^{B}P$:

$$\boxed{{}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}_{B}T}$$

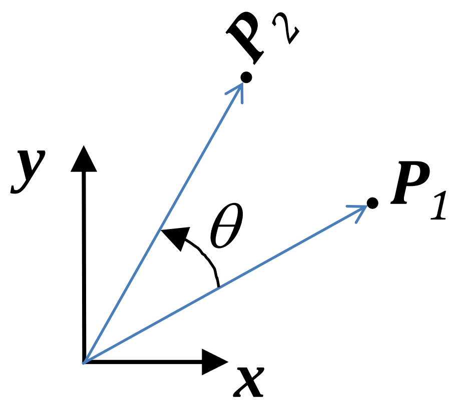
$$\begin{bmatrix} {}^{A}P_x \\ {}^{A}P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}P_x \\ {}^{B}P_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}T_x \\ {}^{A}_{B}T_y \end{bmatrix}$$

Tous cela fonctionne tant que les repères A et B ont la même orientation. Sinon, il faut tenir compte des rotations.



Définir l'opération de rotation

- Correspond à déplacer un point (vecteur), avec une rotation **autour de l'origine**, d'un angle θ antihoraire



- Opération linéaire* : multiplication de matrice

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad P_2 = RP_1$$

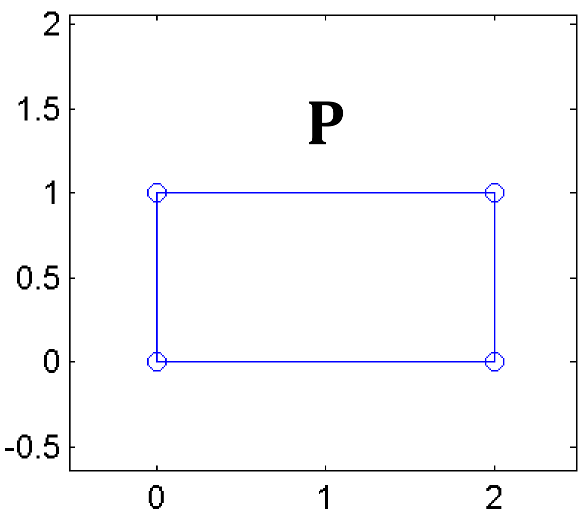
(prémultiplication)

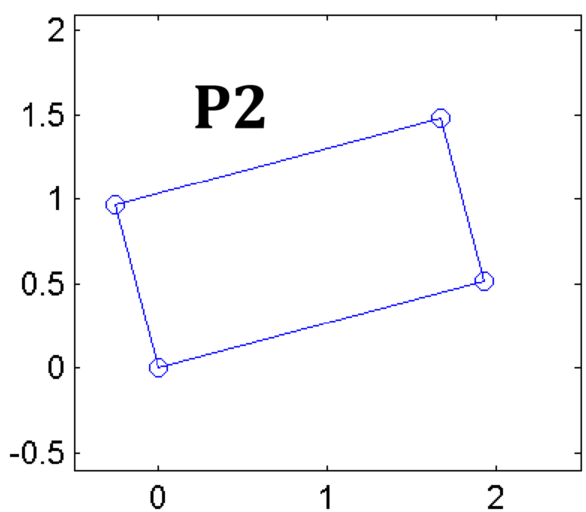
*Le calcul des cos/sin n'est pas linéaire, mais l'application de la rotation R l'est

Exemple rotation 2D

Rotation de $\boldsymbol{\theta}=15^o$ d'un rectangle autour de (0,0) : on applique cette équation pour chaque point

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 15^o & -\sin 15^o \\ \sin 15^o & \cos 15^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9659 & -0.2588 \\ 0.2588 & 0.9659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$





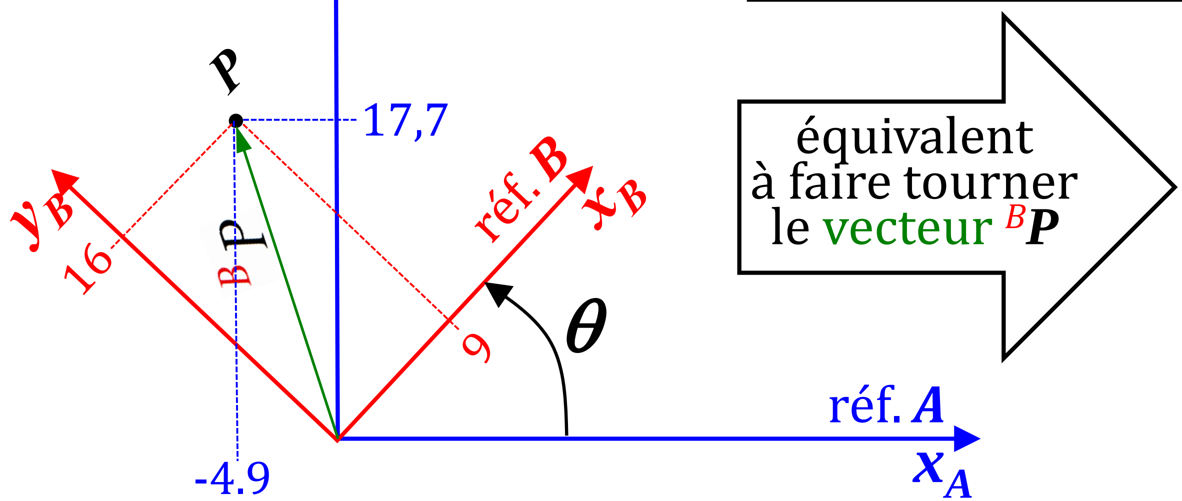

```
% Rotation d'un rectangle
P(:,1) = [0 0]';
P(:,2) = [2 0]';
P(:,3) = [2 1]';
P(:,4) = [0 1]';

angle = 15*pi/180; % radian
R = [cos(angle) -sin(angle) ; ...
     sin(angle)  cos(angle) ];

P2 = R*P; %rotat. sur tous les points
```

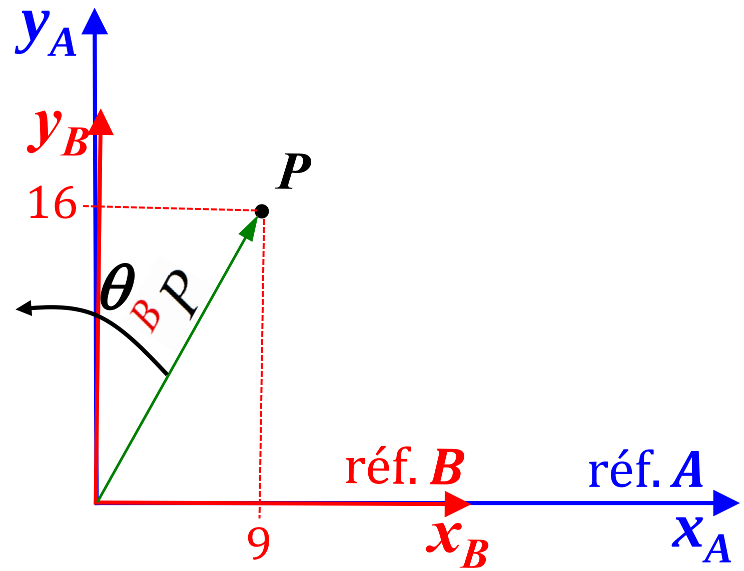
Transformation pour des repères pivotés

- Soit le repère ***B*** pivoté de θ=45º par rapport à ***A***.
- Soit un point ***P*** défini dans ce repère ***B*** : $^{B}\boldsymbol{P}$ =(9,16)
- Pour trouver $^{A}\boldsymbol{P}$, il suffit d'appliquer l'opérateur de rotation :

(coordonnées de P dans le repère A)

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R \; {}^{B}P$$

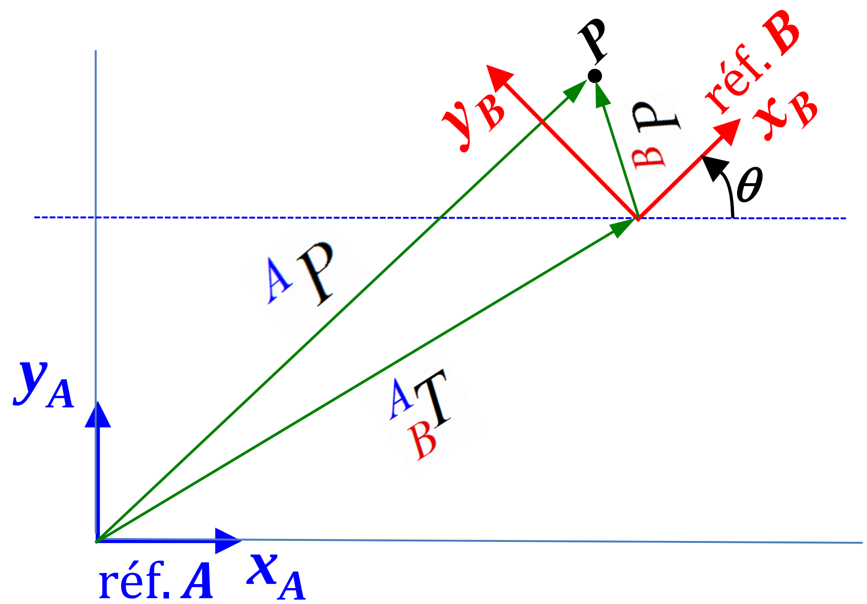




$$^{A}P = \begin{bmatrix} \cos(45^o) & -\sin(45^o) \\ \sin(45^o) & \cos(45^o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.9 \\ 17.7 \end{bmatrix}$$

Transformation entre 2 repères

- On peut représenter toute transformation[1] par une rotation et une translation : cas général 2D/3D
- On a ${}^{B}P$, θ et ${}^{A}_{B}T$, on cherche ${}^{A}P$



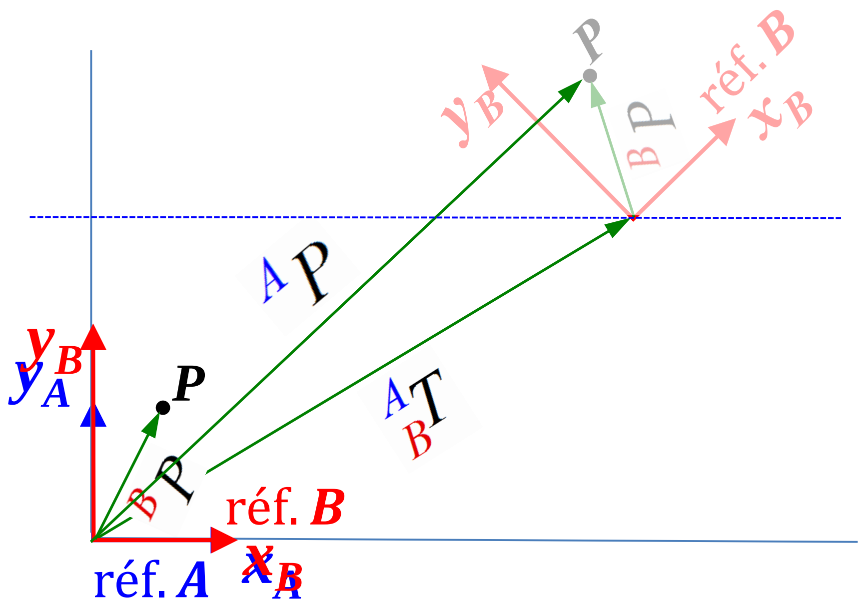
[1]ou une série de transformations

Transformation entre 2 repères

- On peut représenter toute transformation[1] par une rotation et une translation : cas général 2D/3D
- On a ${}^{B}P$, θ et ${}^{A}_{B}T$, on cherche ${}^{A}P$
- Fait faire une rotation θ : ${}^{A}_{B}R$
- Puis la translation ${}^{A}_{B}T$

(Définir un repère B par une combinaison de rotation et une de translation)

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}_{B}T $$



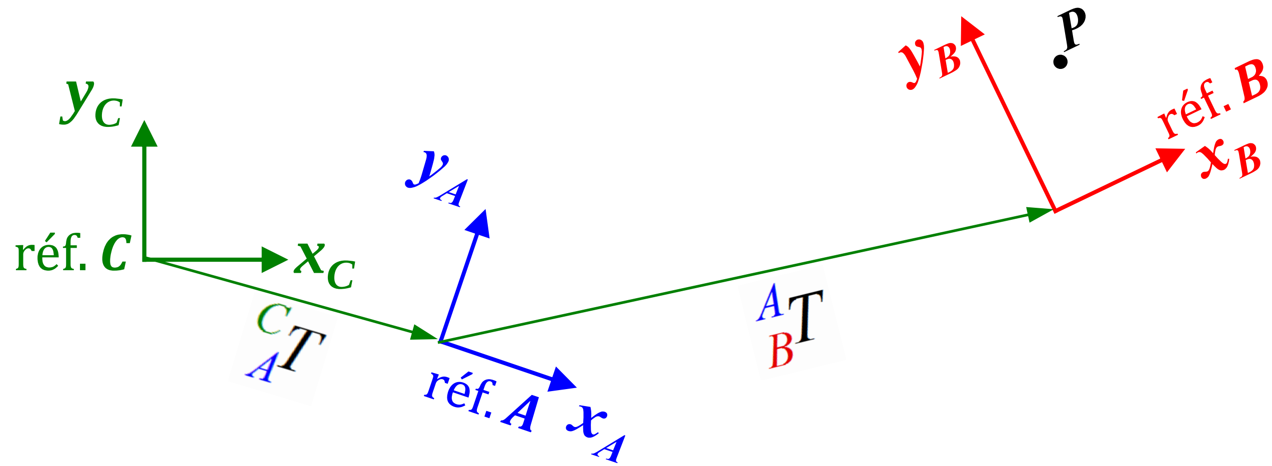
L'ordre *R*, *T* est important!

(et la rotation ***R*** se fait autour de l'origine)

[1]ou une série de transformations

Transformations : coordonnées cartésiennes

- La rotation est une **multiplication**, et la translation est une **addition**
- Chaînage d'opération devient peu élégant



$$ {}^C P = {}^C_A R \left({}^A_B R \, {}^B P + {}^A_B T \right) + {}^C_A T $$

Coordonnées homogène : translation 2D

- En cartésien, une translation est une addition

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \end{bmatrix}$$

- En homogène, translation s'exprime par <u>une multiplication</u>

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_{x1} \\ 0 & 1 & T_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = TP_1$$

Coordonnées homogène : rotation 2D

- Rotation est encore une multiplication

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = RP_1$$

Homogène : chaînage des opérations

- On a donc que des **multiplications**!

$$P_2 = T_2 R_2 T_1 R_1 P$$

- On peut donc facilement combiner toutes les transformations dans une seule matrice

$$P_2 = HP \text{ avec } H = T_2 R_2 T_1 R_1$$

- *(rappel : toute transformation peut s'exprimer par une rotation et une translation, ici capturée dans **H**)*

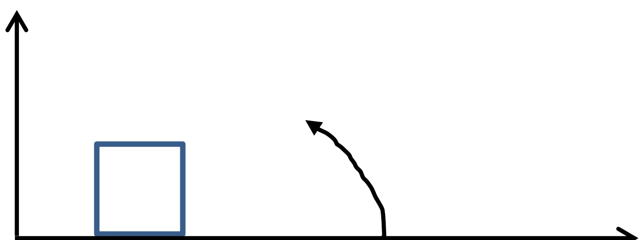
UNIVERSITÉ LAVAL

Homogène : chaînage des opérations

- Ordre est important

$P_2 = TRP$

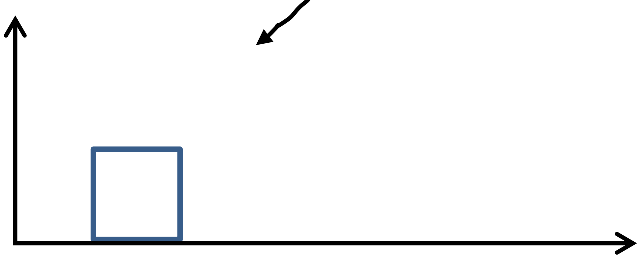
(multiplication des matrices n'est pas commutative)



rotation : autour de l'origine

pas au même endroit!

$P_3 = RTP$



rotation : autour de l'origine

$\boxed{P_3 \neq P_2}$

RT vs. *TR*

- Il est plus naturel de faire ***TR*** que de faire ***RT***

matrice rotation

vecteur translation

$$TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & T_x \\ \sin\theta & \cos\theta & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

couplage translation-rotation ☹

$$RT = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & (T_x \cos\theta - T_y \sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & (T_x \sin\theta + T_y \cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(À l'examen, cherchez les combinaisons ***TR***)

Homogène : transformation 3D

rotation autour axe x
$$R_x(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -\sin A & 0 \\ 0 & \sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation autour axe y
$$R_y(A) = \begin{bmatrix} \cos A & 0 & \sin A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin A & 0 & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(certains manuels ont des erreurs)

rotation autour axe z
$$R_z(A) = \begin{bmatrix} \cos A & -\sin A & 0 & 0 \\ \sin A & \cos A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

translation
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice rotation

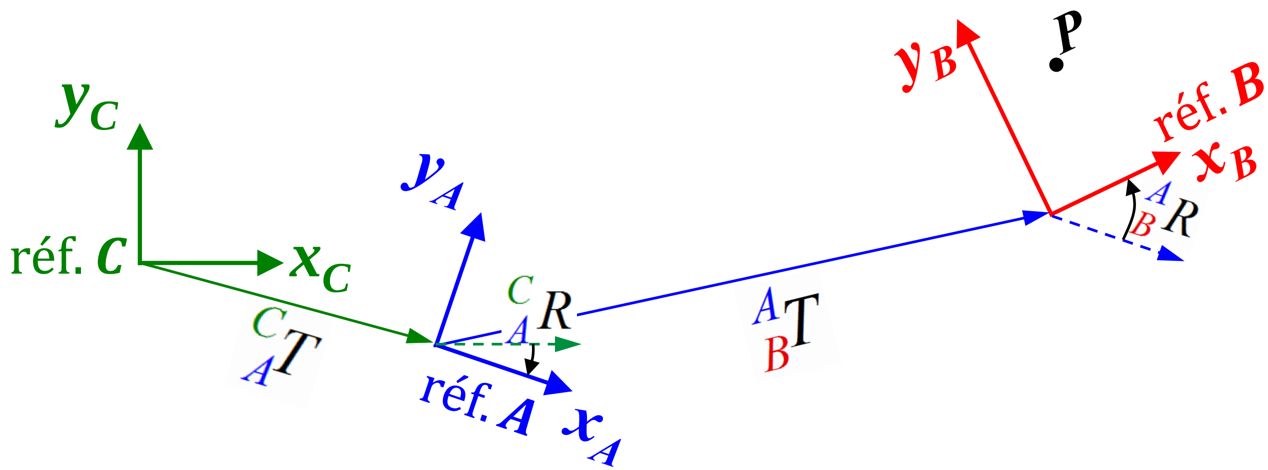
vecteur translation

$$TR = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

UNIVERSITÉ LAVAL

Transformations : coordonnées homogènes

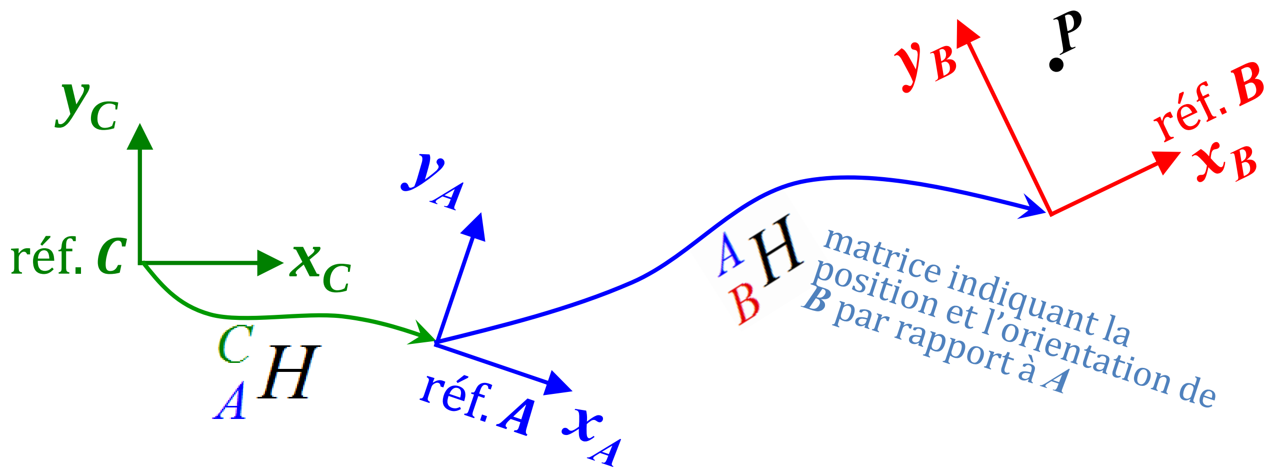
- La rotation est une **multiplication**, et la translation est une **multiplication**
- Chaînage d'opération plus élégant



$$^{C}P = {}^{C}_{A}T\,{}^{C}_{A}R\,{}^{A}_{B}T\,{}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$$

Transformations : coordonnées homogènes

- On peut ainsi combiner directement $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}$ dans une seule matrice de transformation $\boldsymbol{H=TR}$



Rappel :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & \text{rotation} & & \text{transl.} \end{array} \\
{}^{A}_{B}H = & \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & T_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & T_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
{}^{C}P = {}^{C}_{A}H \, \overbrace{\boxed{{}^{A}_{B}H \, {}^{B}P}}^{\text{coordonnées A}}
$$

Sens des transformations

- On peut facilement trouver l'opposé des transformations. Supposons qu'on connaisse ${}^{A}_{B}H$

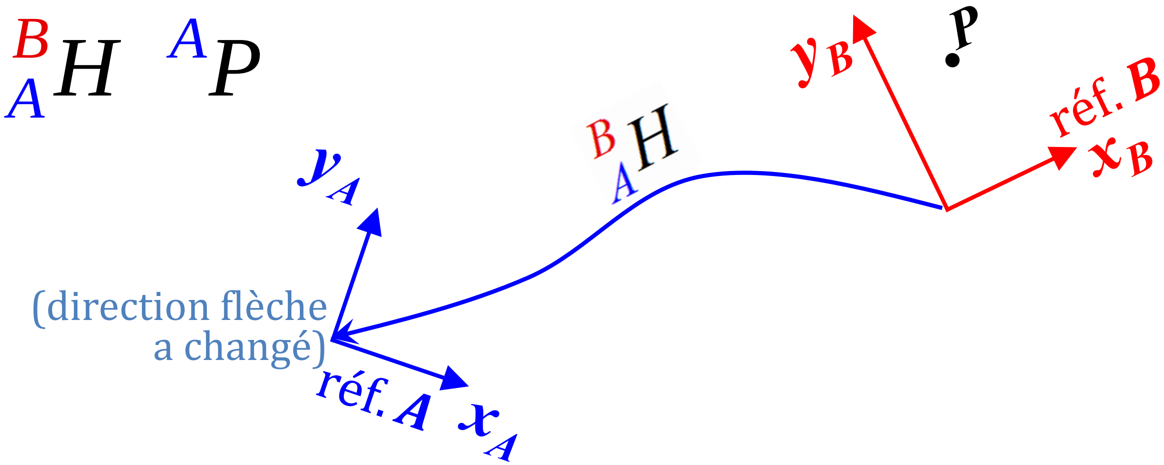
$$ {}^{B}P = {}^{B}_{A}H \; {}^{A}P $$

On cherche

$$ {}^{B}_{A}H^{-1} \; {}^{B}P = {}^{B}_{A}H^{-1} \; {}^{B}_{A}H \; {}^{A}P $$

$$ {}^{B}_{A}H^{-1} \; {}^{B}P = {}^{A}P $$

Or, $ {}^{A}_{B}H \; {}^{B}P = {}^{A}P $



Donc $ {}^{B}_{A}H = {}^{A}_{B}H^{-1} $

Sens des rotations

- Profitez des propriétés de certaines matrices
- Soit : ${}^{A}_{B}H = {}^{A}_{B}T \; {}^{A}_{B}R$
- Quel est l'inverse ${}^{B}_{A}H = {}^{A}_{B}H^{-1}$?

$$ {}^{A}_{B}H^{-1} = ({}^{A}_{B}T \; {}^{A}_{B}R)^{-1} = {}^{A}_{B}R^{-1} \; {}^{A}_{B}T^{-1} $$

R est orthogonal (orthonormal)

$$ = {}^{A}_{B}R^{T} \; {}^{A}_{B}T^{-1} $$

propriété de ***T***

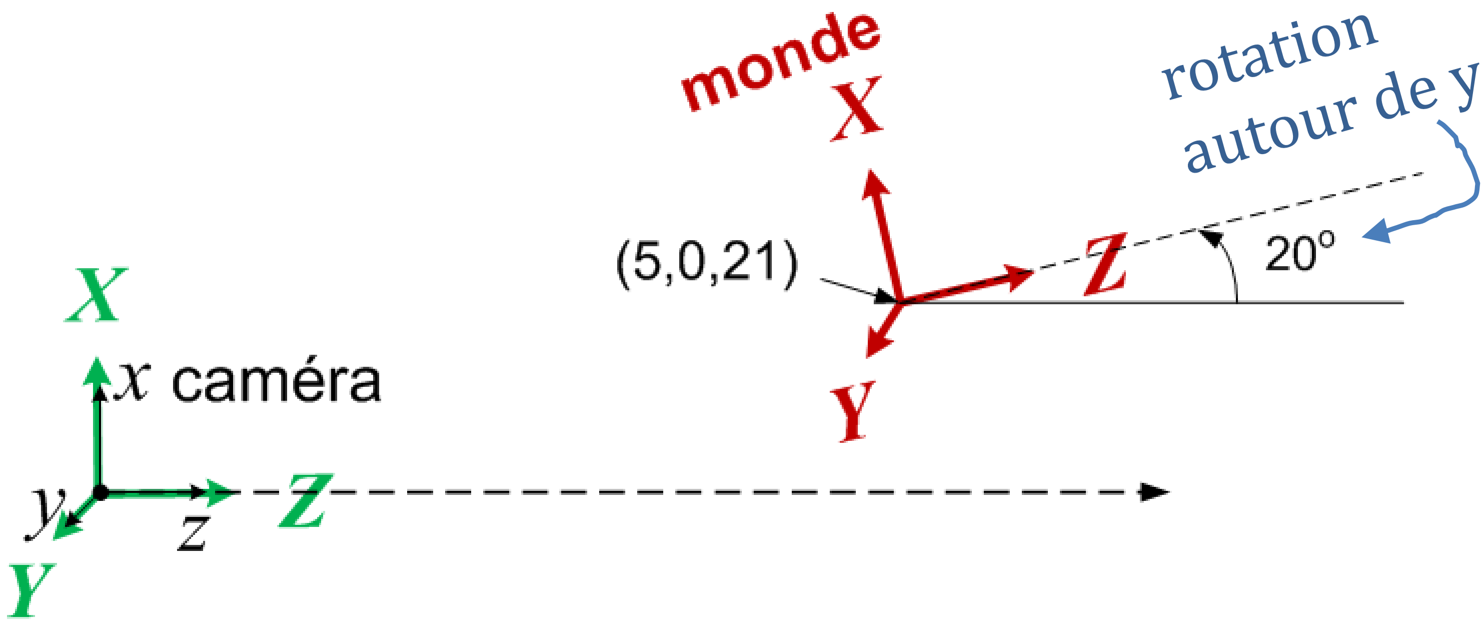
$$ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -T_x \\ 0 & 1 & 0 & -T_y \\ 0 & 0 & 1 & -T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}_{A}H = {}^{A}_{B}R^{T} \, ({}^{B}_{A}T) $$

(ordre inverse, direction inverses)

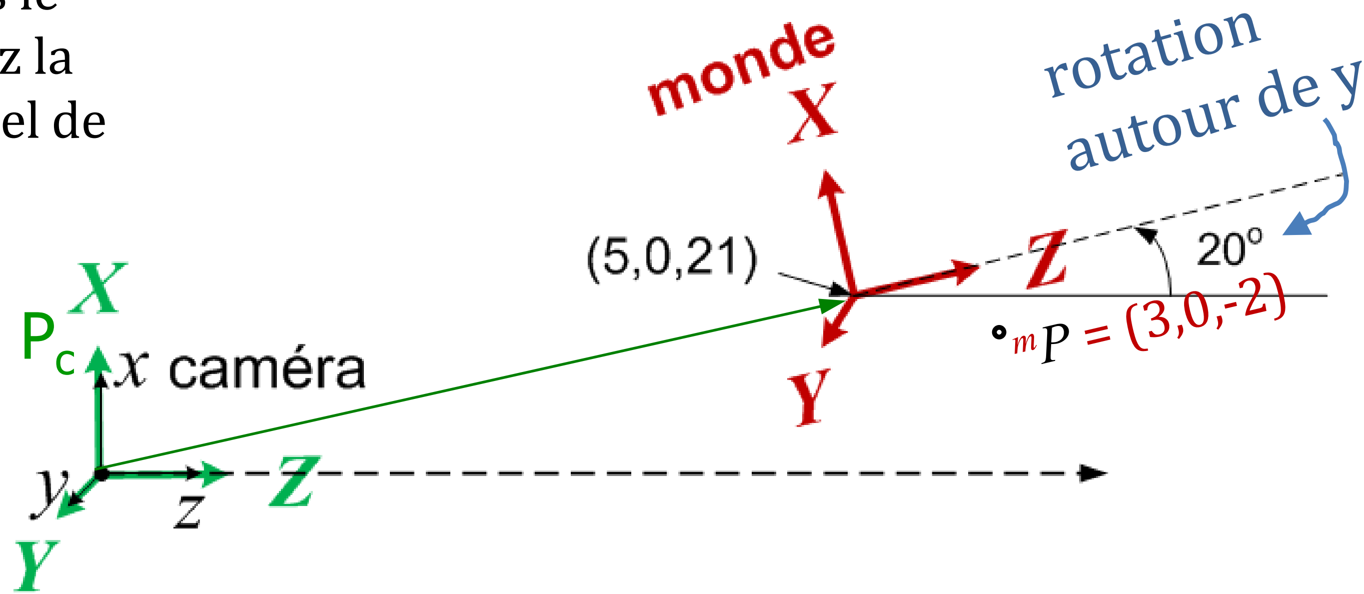
Transformation monde → caméra

- Pour calculer l'endroit où un point dans le monde va se situer par rapport à la caméra, on trouve la transformation entre les deux référentiels



Transformation monde → caméra

Soit le point ${}^{m}P$ = (-3,0,2) dans le référentiel du **monde**. Trouvez la coordonnées dans le référentiel de la **caméra**

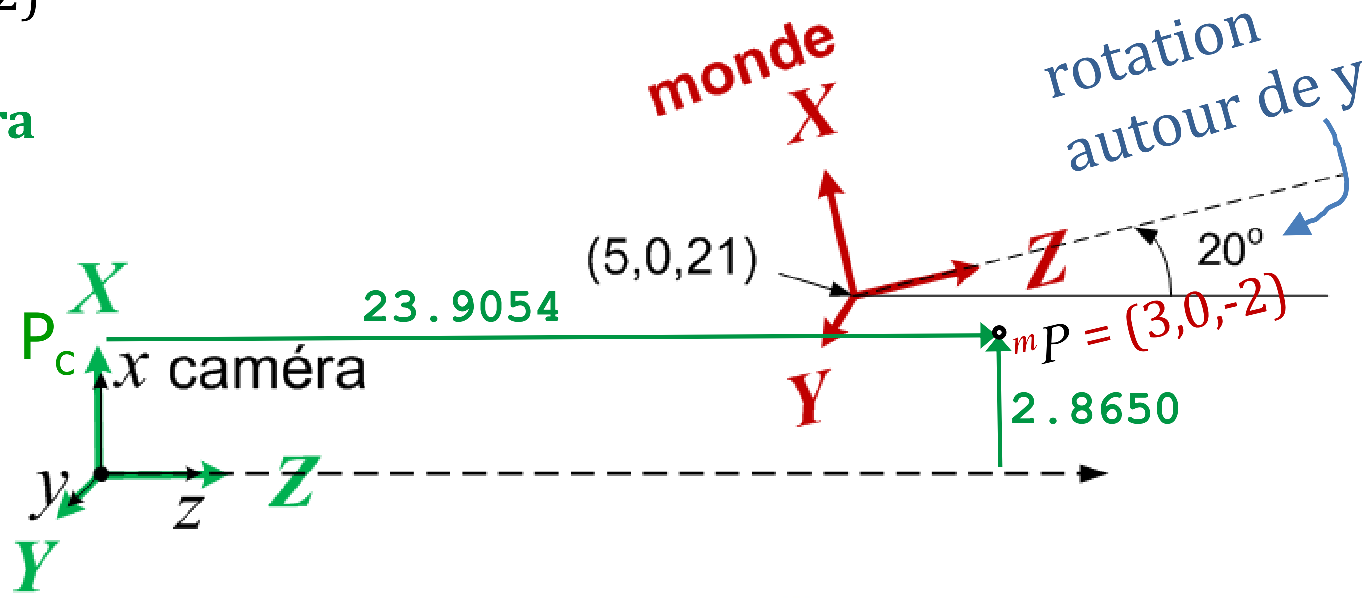


$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_1 = R_y(20^o) = \begin{pmatrix} \cos 20^o & 0 & \sin 20^o & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 20^o & 0 & \cos 20^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation monde → caméra

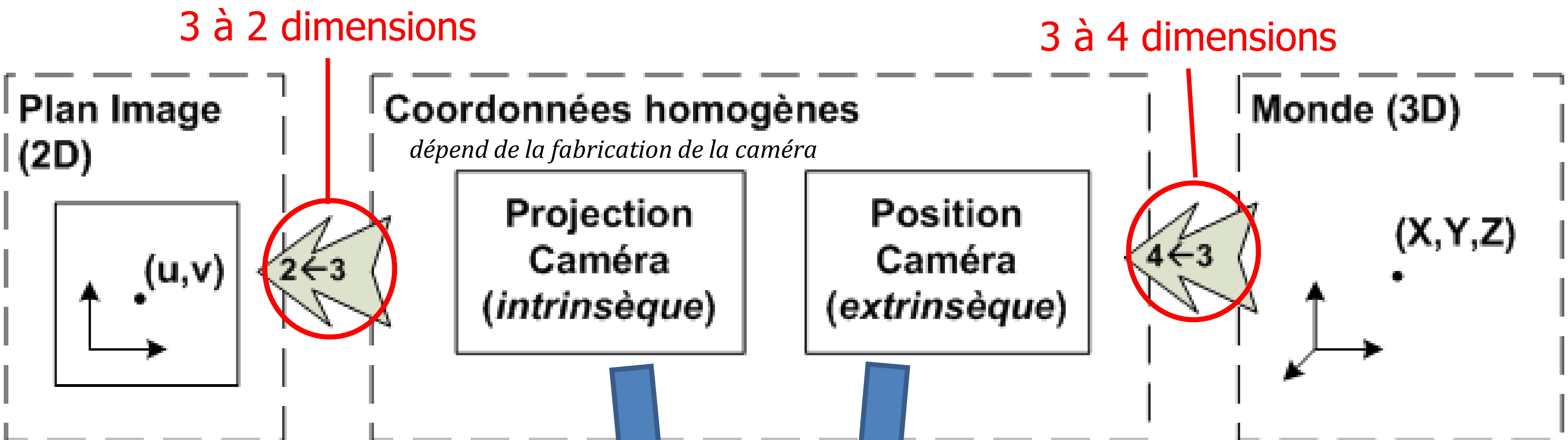
Transférer le point ${}^{m}P = (-3,0,2)$
dans le référentiel du **monde**,
vers le référentiel de la **caméra**

```
Pm =
    -3
     0
     2
     1

R =
    0.9397         0    0.3420         0
         0    1.0000         0         0
   -0.3420         0    0.9397         0
         0         0         0    1.0000

T =
     1     0     0     5
     0     1     0     0
     0     0     1    21
     0     0     0     1

>> Pc = T*R*Pm

Pc =
    2.8650
         0
   23.9054
    1.0000
```



$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_1 = R_y(20^o) = \begin{pmatrix} \cos 20^o & 0 & \sin 20^o & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 20^o & 0 & \cos 20^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Modèle Caméra (Homogène)



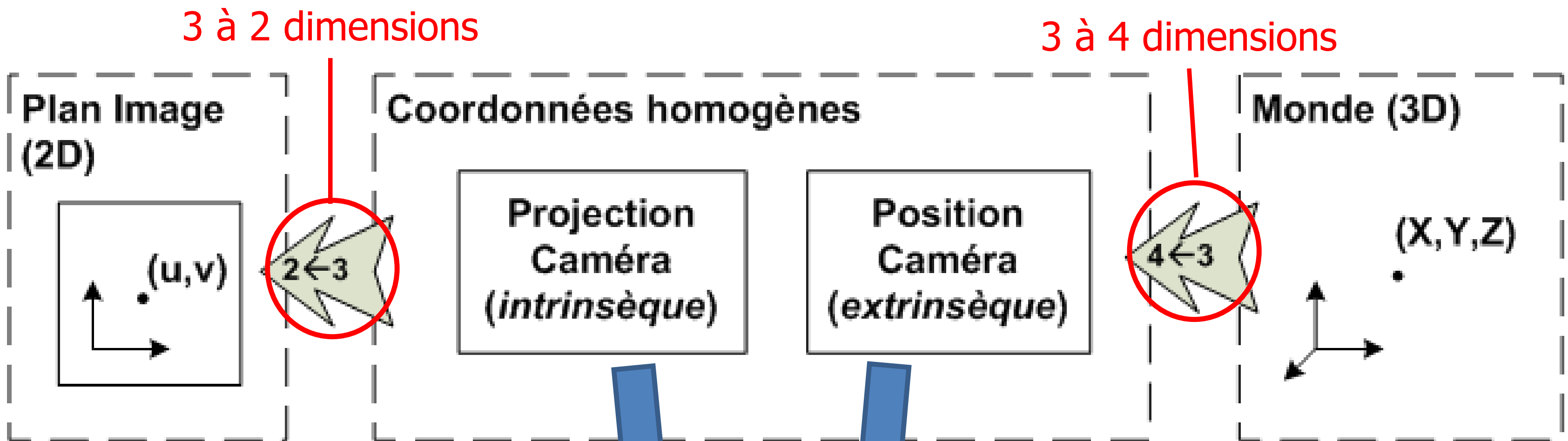
$$u = \frac{x_1}{x_3}$$

$$v = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{pmatrix} \boxed{(H)} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Modèle Caméra plus complet



$$u = \frac{x_1}{x_3} \qquad v = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & u_0 & 0 \\ 0 & \beta & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\left(H \right)} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

À titre informatif

f = 1 pour simplifier

(u_0,v_0) : point principal sur capteur

α, β : échelle x-y en pixel du capteur, idéalement $\alpha=\beta$

γ : déformation entre axes du capteurs, idéalement γ=0