Raisonnement probabiliste sur une période de temps

Plan

- L'incertain dans le temps
- Tâches d'inférence
- Modèles de Markov cachés
- Réseaux bayésiens dynamiques

Situations dynamiques

- Comment modéliser les changements au cours du temps dans un environnement ?
- Exemple: surveillance d'un patient diabétique
  - Observations: doses d'insuline, nourriture, taux de sucre dans le sang, etc.
  - Tâche: Évaluer l'état du patient (taux de sucre et niveau d'insuline).
  - Les mesures peuvent changer rapidement dans le temps.
  - Pour bien évaluer l'état du patient à partir des observations passées, il faut pouvoir modéliser la dynamique des variables.

États et observations

- La dynamique va être représentée par une série de « photos » décrivant l'état du monde à un certain temps.
- Chaque photos contient un ensemble de variables aléatoires, certaines observables, d'autres non.
- $\mathbf{X}_t$ **:** l'ensemble des variables non observables au temps *t*.
- $\mathbf{E}_t$: l'ensemble des variables d'évidence au temps t. Pour une observation quelconque au temps t, on a $\mathbf{E}_t = \mathbf{e}_t$, pour un ensemble de valeurs $\mathbf{e}_t$

Processus stationnaire

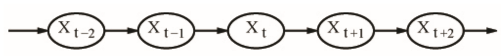
- Pour ne pas avoir à spécifier une infinité de tables de probabilités, une pour chaque variable à chaque temps,
- On suppose que le processus qui gère les changements dans l'environnement est stationnaire.
  - Les lois qui gère le changement ne change pas dans le temps
  - Donc: $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|Parents(\mathbf{X}_t))$ est la même pour tout temps t.

Processus de Markov

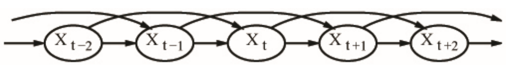
- Pour éviter de devoir tenir compte d'un nombre infini de parents, on utilise la supposition de Markov:
  - L'état courant ne dépend que d'une historique finie d'états précédents.
- Processus de Markov du premier degré
  - L'état courant ne dépend que de l'état précédent
  - $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-1})$
- Second degré: $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-2},\mathbf{X}_{t-1})$

Réseau bayésien

- Processus de Markov de premier ordre:



- Processus de Markov de deuxième ordre:



Modèle d'observation

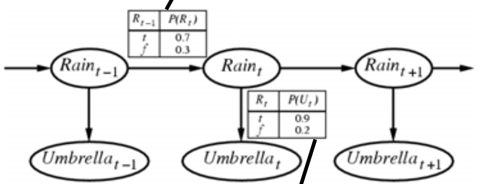
- On suppose que les variables d'évidence ne dépendent que de l'état courant.
  - $\mathbf{P}(\mathbf{E}_t|\mathbf{X}_{0:t},\mathbf{E}_{0:t-1}) = \mathbf{P}(\mathbf{E}_t|\mathbf{X}_t)$
- $\mathbf{P}(\mathbf{E}_t|\mathbf{X}_t)$ est le modèle d'observation, car il défini comment les capteurs (variables d'évidence) sont influencés par l'état courant.

L'Homme au parapluie

- Supposez que vous êtes un vigile et que vous travaillez dans une installation souterraine quelconque. Vous voulez savoir s'il peut aujourd'hui, mais vous n'avez accès au monde extérieur que chaque matin, quand vous voyez le Directeur entrer muni ou pas d'un parapluie
- Pour chaque jour t,
  - l'ensemble $\mathbf{E}_t$ contient donc une seule variable observable Parapluie, $Umbrella_t$
  - L'ensemble $\mathbf{X}_t$ ne contient qu'une variable $Rain_t$

Exemple réseau bayésien

Modèle de transition: $P(Rain_t|Rain_{t-1})$



Modèle d'observation: $P(Umbrella_t|Rain_t)$

Distribution conjointe complète

- Avec le modèle de transition et le modèle d'observation, on peut représenter la table de distribution jointe complète pour toutes les variables.

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_t, \mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_0) \prod_{i=1}^{t} \mathbf{P}(X_i|\mathbf{X}_{i-1})\mathbf{P}(\mathbf{E}_i|\mathbf{X}_i)$$

La distribution de probabilité à priori au temps 0.

Probabilités de transition et de senseurs s'exprimant comme $\mathbf{P}(\mathbf{X}_i|Parents(\mathbf{X}_i))$

Supposition de Markov

- Dans l'exemple précédent, on supposait un processus de Markov de premier degré.
- La véracité de cette hypothèse dépend de chaque problème.
- Dans certains problèmes ce n'est qu'une approximation.
  - Si l'approximation n'est pas assez bonne, on peut:
    - Augmenter l'ordre du processus de Markov
    - Augmenter l'ensemble des variables d'états. Ex: $Température_t$, $Humidité_t$ et $Pression_t$.

Tâches d'inférence

- Filtrage: Calculer les croyances: $\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})$
  - Ex: Calculer la probabilité qu'il pleuve aujourd'hui étant donné toutes les observations.
- Prédiction: $\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k}|\mathbf{e}_{1:t})$ pour un $k > 0$
  - Ex: Calculer la probabilité qu'il pleuve dans trois jours étant donné toutes les observations.
- Lissage ou rétrospection (smoothing): $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t})$ pour un $0 \leq k < t$
  - Ex: Probabilité qu'il ait plu lundi passé étant donné toutes les observations.
- Explication la plus probable: Étant donné ce que l'agent a observé, quelle est la suite d'états la plus probable: $\arg\max_{\mathbf{x}_{1:t}} P(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{e}_{1:t})$

Filtrage

- Le calcul est composé de deux parties:
  - Prédiction de la distribution au temps $w.\ 4$, selon la distribution au temps t.
  - Mise à jour de la prédiction à partir des nouvelles évidences $\mathbf{e}_{t+1}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1}) && \text{dividing up the evidence}\\ &= \alpha\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{e}_{1:t})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) && \text{using Bayes' rule}\\ &= \alpha\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t}) && \text{by the Markov property of evidence}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) &= \alpha\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\sum_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{e}_{1:t})P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})\\ &= \alpha\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\sum_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t}) && \text{using the Markov property}\end{aligned}$$

Filtrage (suite)

- Au départ : on a filtré jusqu'au temps t, et l'agent doit déterminer l'état au temps $t+1$ sachant la nouvelle évidence e_{t+1}

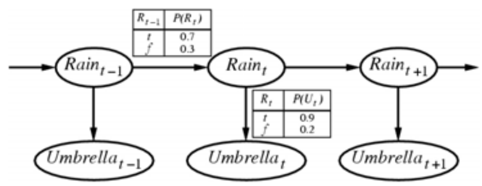
$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) = f(\mathbf{e}_{t+1}, \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{X}_t|\mathbf{e}_{1:t})}_{\mathbf{f}_{1:t}})$$

- Soit

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{e}_{1:t+1}) &= \alpha\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\sum_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{e}_{1:t})P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})\\ &= \alpha\underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1})\sum_{\mathbf{x}_t}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)P(\mathbf{x}_t|\mathbf{e}_{1:t})}_{\mathbf{FORWARD}(\mathbf{f}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})} && \text{using the Markov property}\end{aligned}$$

- Soit donc $\mathbf{f}_{1:t+1} = \alpha\mathbf{FORWARD}(\mathbf{f}_{1:t}, \mathbf{e}_{t+1})$

Exemple



Exemple

Let us illustrate the filtering process for two steps in the basic umbrella example (see igure 15.2). We assume that our security guard has some prior belief as to whether it ained on day 0, just before the observation sequence begins. Let's suppose this is $\mathbf{P}(R_0) =$ $0.5, 0.5\rangle$. Now we process the two observations as follows:

- On day 1, the umbrella appears, so $U_1 = true$. The prediction from $t = 0$ to $t = 1$ is

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R_1) &= \sum_{r_0} \mathbf{P}(R_1|r_0)P(r_0) \\ &= \langle 0.7, 0.3\rangle \times 0.5 + \langle 0.3, 0.7\rangle \times 0.5 = \langle 0.5, 0.5\rangle\end{aligned}$$

  and updating with the evidence for $t = 1$ gives

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R_1|u_1) &= \alpha\mathbf{P}(u_1|R_1)\mathbf{P}(R_1) = \alpha\langle 0.9, 0.2\rangle\langle 0.5, 0.5\rangle \\ &= \alpha\langle 0.45, 0.1\rangle \approx \underline{\langle 0.818, 0.182\rangle}\end{aligned}$$

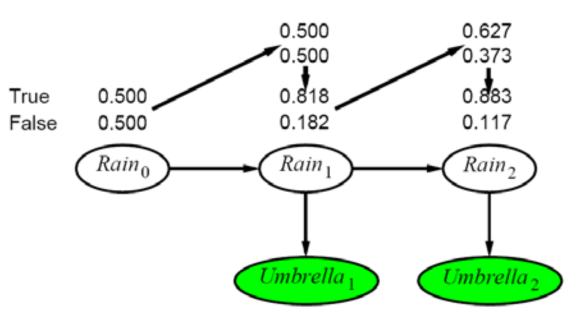
- On day 2, the umbrella appears, so $U_2 = true$. The prediction from $t = 1$ to $t = 2$ is

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R_2|u_1) &= \sum_{r_1} \mathbf{P}(R_2|r_1)P(r_1|u_1) \\ &= \langle 0.7, 0.3\rangle \times 0.818 + \langle 0.3, 0.7\rangle \times 0.182 \approx \langle 0.627, 0.373\rangle\end{aligned}$$

  and updating with the evidence for $t = 2$ gives

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R_2|u_1, u_2) &= \alpha\mathbf{P}(u_2|R_2)\mathbf{P}(R_2|u_1) = \alpha\langle 0.9, 0.2\rangle\langle 0.627, 0.373\rangle \\ &= \alpha\langle 0.565, 0.075\rangle \approx \underline{\langle 0.883, 0.117\rangle}\end{aligned}$$

Exemple filtrage



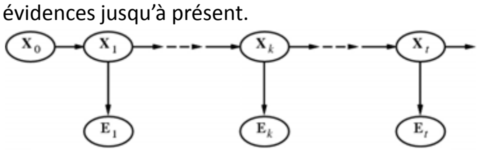
Prédiction

- La tâche de prédiction peut être simplement vue comme un filtrage sans ajout de nouvelles observations :

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1}|\mathbf{e}_{1:t}) = \sum_{\mathbf{x}_{t+k}} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+k+1}|\mathbf{x}_{t+k}) P(\mathbf{x}_{t+k}|\mathbf{e}_{1:t})$$

Lissage ou rétrospection (smoothing)

- On veut calculer la probabilité d'avoir été dans un certain état dans le passé en considérant toutes les évidences jusqu'à présent.



$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t}) = \alpha \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k}) \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k) = \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}) P(\mathbf{e}_{k+2:t}|\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k)$$

Obtenu à partir du modèle

Appel Récursif

Lissage (suite)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:t}) &= \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k}, \mathbf{e}_{k+1:t}) \\
&= \alpha \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k}) \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k, \mathbf{e}_{1:k}) \quad \text{(using Bayes' rule)} \\
&= \alpha \mathbf{P}(\mathbf{X}_k|\mathbf{e}_{1:k}) \mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k) \quad \text{(using conditional independence)} \\
&= \alpha \mathbf{f}_{1:k} \times \mathbf{b}_{k+1:t}\,. \qquad (15.8)
\end{aligned}$$

Filtrage

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_{k+1:t}|\mathbf{X}_k) = \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}) P(\mathbf{e}_{k+2:t}|\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{X}_k)$$

$$\mathbf{b}_{k+1:t} = \mathrm{BACKWARD}(\mathbf{b}_{k+2:t}, \mathbf{e}_{k+1})$$

Exemple

- Calculer la probabilité a posteriori qu'il ait plu au temps 1 sachant les évidences au temps 1 et 2.

$$\mathbf{P}(R_1|u_1,u_2) = \alpha \mathbf{P}(u_2|R_1)\mathbf{P}(R_1|u_1)$$

Déterminé à partir du filtrage =<0.818,0.182>

$$\mathbf{P}(u_2|R_1) = \sum_{r_2} P(u_2|r_2)P(\ |r_2)\mathbf{P}(r_2|R_1)$$

$$= (0.9 \times 1 \times \langle 0.7, 0.3\rangle) + (0.2 \times 1 \times \langle 0.3, 0.7\rangle) = \langle 0.69, 0.41\rangle$$

$$\mathbf{P}(R_1|u_1,u_2) = \alpha\langle 0.69, 0.41\rangle \times \langle 0.818, 0.182\rangle \approx \langle 0.883, 0.117\rangle$$

Explication la plus probable

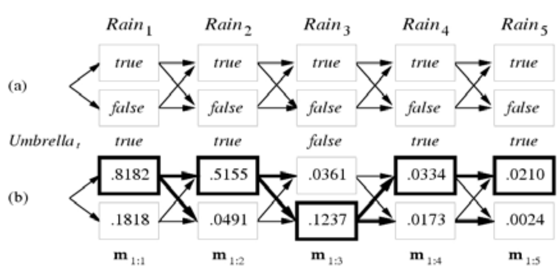
- On veut trouver la suite d'états la plus probable selon les observations.
- $\mathbf{m}_{1:t}(i)$ est la probabilité du chemin le plus probable jusqu'à l'état i.

$$\mathbf{m}_{1:t} = \max_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{t-1}} \mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{X}_t | \mathbf{e}_{1:t})$$

$$\mathbf{m}_{1:t+1} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1}|\mathbf{X}_{t+1}) \max_{\mathbf{x}_t} \left(\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{x}_t)\mathbf{m}_{1:t}\right)$$

Exemple

[true,true,false,true,true] est la séquence de parapluies observées par le garde lors de ces 5 premiers jours de travail



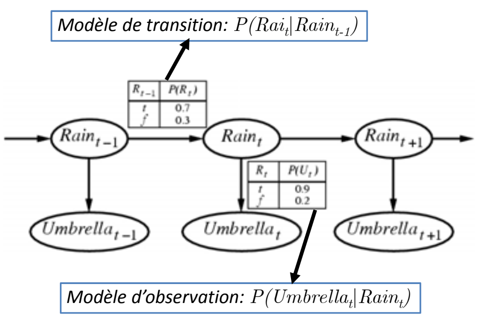
Modèles de Markov cachés

- L'état de l'environnement doit ne contenir qu'une seule variable aléatoire discrète.
- Le domaine de $\mathbf{X}_t = \{1,\ldots,S\}$
- Le modèle de transition $P(X_t|X_{t-1})$devient une matrice de S x S:
- Exemple:

$$\mathbf{T}_{ij} = P(X_t = j | X_{t-1} = i)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}(X_t|X_{t-1}) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Exemple réseau bayésien



Modèles de Markov cachés

- Le modèle d'observation est aussi représenté sous forme de matrice.
- On ne considère que le cas observé, donc la matrice est une matrice diagonale où les valeurs de la diagonale sont $\mathrm{P}(\mathrm{e}_t|\mathrm{X}_t = \mathrm{i})$ et les autres entrées sont 0.
- Dans l'exemple, $\mathrm{u}_1 = \mathrm{Vrai}$, donc :

$$\mathbf{O}_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

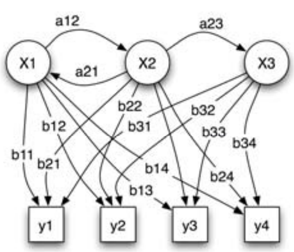
HMM

- Si $\mathbf{u}_3 = \boldsymbol{False}$

alors

$$\mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

HMMs(Wikipédia)



Paramètres:

X---états
Y---Observations
a---probabilités de transition états
b---probabilités de sorties

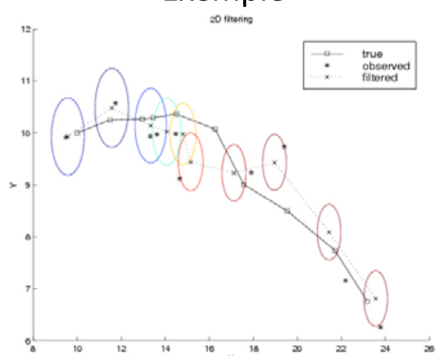
Modèles de Markov cachés

- À l'aide de cette représentation sous forme de matrice, les calculs de filtrage et d'information a posteriori deviennent de simple opérations de base sur des matrices et des vecteurs.
- Ces calculs de matrices ont permis de faire ressortir des algorithmes plus efficaces permettant de calculer l'information a posteriori avec un espace constant.

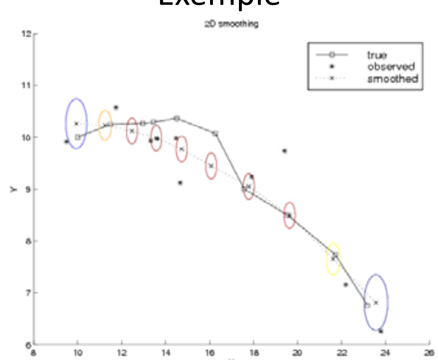
Filtres de Kalman

- Utilisé pour modéliser des systèmes décrits par un ensemble de variables continues.
- Utilise des fonctions gaussiennes pour estimer les probabilités.
- Plusieurs applications:
  - Poursuite radar d'avions ou de missiles
  - Poursuite acoustique de sous-marins ou de véhicules
  - Poursuite visuelle de véhicules ou de personnes.

Exemple



Exemple



FK (Fin)

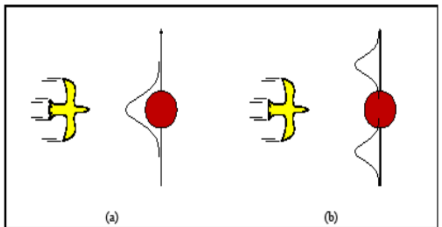
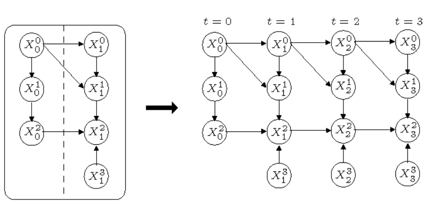


Figure 15.10 A bird flying toward a tree (top views). (a) A Kalman filter will predict the location of the bird using a single Gaussian centered on the obstacle. (b) A more realistic model allows for the bird's evasive action, predicting that it will fly to one side or the other.

Réseaux bayésiens dynamiques

- En général, un DBN peut avoir à chaque temps un nombre quelconque de variables d'états et de variables d'évidences.
- Par simplicité, on considère que
  - Les variables et leurs liens seront répliqués exactement d'un temps à l'autre.
  - Le DBN représente un processus de Markov de premier ordre, c'est-à-dire que les parents de chaque variable ne peut être que dans le temps courant ou le temps précédent.

Exemple de DBN



Exemple de DBN (Trabelsi et al, 2010)

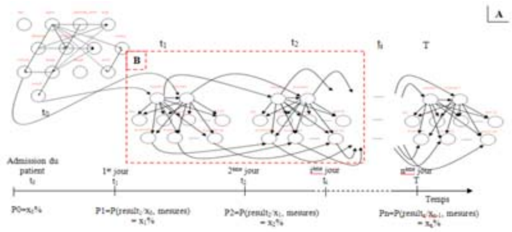
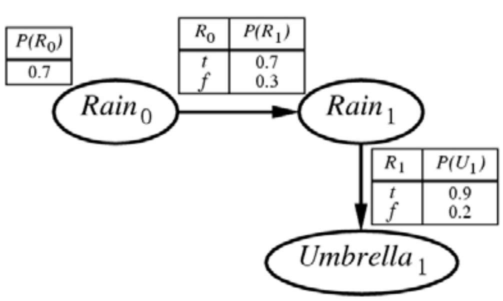


Figure 3. *A :Le graphe causal de notre RBD. B : Représentation de deux tranches de temps de notre réseau dynamique*

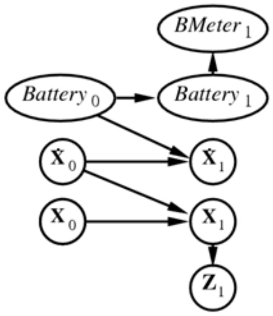
DBN vs HMM

- Tous les HMM sont des DBN à une seule variable.
- Tous les DBN discrets sont des HMMs
- La différence est au niveau du nombre de probabilités à définir
  - Ex: 20 variables booléennes avec chacune trois parents
    - DBN: $20 \times 2^3 = 160$ probabilités
    - HMM: on a 2^{20} états et par conséquent $2^{2x20 = 40}$ probabilités
- La relation est semblable à celle entre un réseau bayésien est une table de probabilités jointes complète.

Exemple DBN: Problème de l'umbrella



Exemple DBN: Un robot se déplaçant



Inférence exacte avec un DBN

- On peut dérouler le DBN en copiant les variables jusqu'au temps courant.
- On obtient donc un réseau bayésien normal et on peut donc appliquer les algorithmes d'inférence exacte vu au chapitre précédent, dédié aux Réseaux Bayésiens, comme l'algorithme d'élimination de variable.
- Le problème c'est qu'en pratique, les calculs sont

Pondération par la vraisemblance
(Likelihood weighting)

- On maintient un ensemble de N échantillons que l'on génère un temps à la fois dans le DBN.
- On a besoin que du temps courant et du temps suivant en mémoire pour faire les calculs.
- Dans notre exemple de l'umbrella, on peut voir qu'il n'y a aucune variable d'état qui a une variable d'évidence comme parent, donc nos échantillons seraient indépendants des évidences.
- Plus on échantillonne sur une longue période de temps, plus nos échantillons risquent d'être loin de la réalité.
- Le nombre d'échantillons nécessaires augmente exponentiellement avec *t*.

Filtrage de particules

- S’assure que les échantillons couvrent les parties les plus probables de l’espace d’états.
- On échantillonne en favorisant les états les plus probables.

Filtrage de particules (suiet)

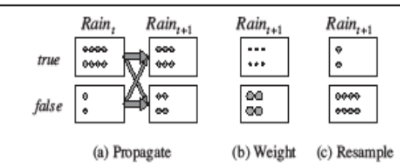


Figure 15.18 The particle filtering update cycle for the umbrella DBN with $N = 10$, showing the sample populations of each state. (a) At time t, 8 samples indicate *rain* and 2 indicate $\neg rain$. Each is propagated forward by sampling the next state through the transition model. At time $t + 1$, 6 samples indicate *rain* and 4 indicate $\neg rain$. (b) $\neg umbrella$ is observed at $t + 1$. Each sample is weighted by its likelihood for the observation, as indicated by the size of the circles. (c) A new set of 10 samples is generated by weighted random selection from the current set, resulting in 2 samples that indicate *rain* and 8 that indicate $\neg rain$.