L'incertain

Plan

- Agir dans l'incertain;
- Probabilités;
- Distributions de probabilités jointes;
- Indépendance.

Agir dans l'incertitude

- Les approches logiques que l'on a vues aux chapitres précédents permettent aux agents s'ils ont suffisamment d'information de construire des plans qui leur assurent d'atteindre leur but.
- En réalité, les agents n'ont presque jamais toutes les informations relatives à leur environnement.
- Ils doivent donc agir dans l'incertain.

Exemple de décision dans l'incertain

- Soit A_t, le plan qui me permet d'être à mon spectacle au centre ville, t minutes avant le début du concert. Est-ce que A_t me permet d'arriver à temps ?
- Problèmes :
  - Observabilité partielle (état des routes, plans des autres agents, etc.);
  - Senseurs bruités (Pluie/Neige/orage pas certains);
  - Les effets des actions sont incertains (crevaison);
  - Immense complexité quant à la modélisation et à la prédiction du trafic routier.

Exemple de décision dans l'incertain

- Une approche purement logique
  - risque de donner une réponse fausse : Ex : A_{25} fera que j'arrive à temps.
  - m'amène à des conclusions trop légères pour une prise de décision: Ex: A_{25} fera que j'arrive à temps si pas d'accidents sur le pont, s'il ne pleut pas, si mes pneus restent intactes, etc.
- Remarque : A_{120} (soit 2h avant) pourrait raisonnablement solutionner mon problème, mais je dois rester 2h à attendre (grande perte de temps).

Décision rationnelle

- Malgré l'incertitude, on doit trouver un plan permettant à l'agent de faire les « bonnes actions».
  - *Parmi tous les plans, l'agent doit choisir celui qui devrait maximiser la mesure de performance de l'agent, selon les informations qu'il a de son environnement.*

Décision rationnelle

- Pour notre exemple, la mesure de performance comprend:
  - arriver à temps,
  - ne pas trop attendre,
  - de pas avoir de contravention d'excès de vitesse.
- L'agent n'a pas les informations nécessaires pour garantir tous ces points.
- Mais, il peut avoir un degré de croyance qu'il va les atteindre.
- La décision rationnelle dépend donc:
  - de l'importance relative des différents buts,
  - de la probabilité de les atteindre,
  - du degré auquel ils seront atteints.

7

Décision rationnelle

- Pour notre exemple, la mesure de performance comprend :
  - arriver à temps,
  - ne pas trop attendre,
  - de pas avoir de contravention d'excès de vitesse.
- D'autres plans comme $\boldsymbol{A}_{120}$ pourrait augmenter les chances d'arriver à temps, mais ça va aussi augmenter les chance d'attendre.

8

Gérer les connaissances incertaines

- Exemple de diagnostique dentaire.

$$\forall p \; Symptome(p, MalDeDent) \Rightarrow Maladie(p, Carie)$$

  - La règle est fausse, parce qu'on peut avoir mal aux dents sans avoir de carie. Pour la rendre vrai, il faudrait lister toutes les causes possibles d'un mal de dent.
  - La règle ne fonctionne pas plus à l'envers, parce qu'on peut avoir une carie sans avoir un mal de dent.

$$\forall p \; Maladie(p, Carie) \Rightarrow Symptome(p, MalDeDent)$$

9

Méthodes pour gérer l'incertain

- Logique des défauts ou logiques non-monotones
  - Supposons que ma voiture n'a pas de crevaison.
  - Supposons que $\boldsymbol{A_{25}}$ fera l'affaire à moins d'être contredit par une évidence.
  - Questions :
    - Quelles suppositions sont raisonnables ?
    - Comment gérer les contradictions ?

Logique des défauts (suite)

- Logique des défauts = logique classique + règles de défauts
- Règles de défaut :
  - ψ : prérequis
  - ϕ_i : justification
  - γ : conséquent

$$\frac{\psi : \phi_1, \ldots, \phi_n}{\gamma}$$

« si ψ dérivable et pour tout i, $=\phi_i$ est non dérivable, alors dériver γ »

Méthodes pour gérer l'incertain

- Utilisation de règles avec facteurs de certitudes
  - $A_{25} \mapsto_{0.3}$ m'amènera à l'aéroport à temps
  - *Arrosage* $\mapsto_{0.99}$ *GazonHumide*
  - *GazonHumide* $\mapsto_{0.75}$ *Pluie*
  - Problème: Comment traiter les combinaisons ?
    - *Arrosage* $\mapsto_{?}$ *Pluie*

Méthodes pour gérer l'incertain

- Probabilités
  - Étant donné l'évidence disponible (météo à la radio, état des parkings, états de la circulation, etc.), $\boldsymbol{A_{25}}$ fera que j'arrive à temps avec une probabilité de 0.04.
- Logique floue
  - Gazon humide est vrai à 70%, donc ça gère un degré de vérité et non une croyance (= l'incertain).

13

Problème de la logique de premier ordre

- Paresse: trop de travail d'énumérer l'ensemble complet des antécédents ou des conséquences afin d'assurer qu'une règle n'a pas d'exceptions. De plus, une telle règle serait trop difficile à utiliser.
- Ignorance théorique: Dans le cas du diagnostique médical par exemple, la médecine n'a pas de théorie complète.
- Ignorance pratique: même en connaissant toutes les règles, il peut y avoir incertitude. Par exemple, pour un patient donné, il se peut que tous les tests nécessaires n'aient pas été faits ou ne peuvent pas être faits.

14

Degré de croyance

- Peu importe la direction, un mal de dent et une carie ne constituent pas une conséquence logique ni dans un sens ni dans l'autre.

$$\forall p\ Symptome(p, MalDeDent) \Rightarrow Maladie(p, Carie)$$
$$\forall p\ Maladie(p, Carie) \Rightarrow Symptome(p, MalDeDent)$$

- Les connaissances de l'agent ne peuvent que lui donner un degré de croyance.
- La théorie des probabilités permet de gérer les degrés de croyance.

15

Degré de croyance

- Par exemple, on va dire que le patient a 80% de chance d'avoir une carie s'il a un mal de dent.
- Ce qui veut dire que l'on s'attend que parmi toutes les situations identiques (du point de vue des connaissances de l'agent) le patient va avoir une carie dans 80% des cas.

Probabilités

- 0 = faux
- 1 = vrai
-]0,1[= degré de croyance dans la vérité de l'énoncé
  - 0.8 = dans 80% des cas, l'énoncé est vrai.
- Important de faire la distinction avec degré de vérité.
  - 0.8 = 80% vrai (logique floue)
- Probabilité a priori ou inconditionnelle: probabilité avant l'évidence (la perception).
- Probabilité a posteriori ou conditionnelle: probabilité après l'évidence (la perception).

Théorie de l'utilité

- Même si A_{25} a 95% de chance de réussite, est-ce que c'est une décision rationnelle ?
  - Pas nécessairement, il pourrait y avoir d'autres plans avec une plus grande probabilité.
  - Si c'est vraiment vital d'être là à l'heure, on serait plus prêt à attendre, donc le plan A_{120} pourrait être une meilleure décision.
- Pour pouvoir prendre ce type de décisions, l'agent doit avoir des préférences sur les résultats possibles des plans.
- Pour raisonner sur les préférences, on va utiliser la théorie de l'utilité.

Théorie de l'utilité

- Tous les états ont un degré d'utilité.
- Les préférences peuvent être égoïstes ou altruistes.
- Permet de pondérer la désirabilité des buts et la chance de les atteindre.
- L'agent va raisonner en fonction de ses préférences:
  - Chaque état a un degré d'utilité pour un agent.
  - L'agent préfère les états avec un haut degré d'utilité.

19

Théorie de la décision

- Une action non déterministe A aura les résultats possibles suivants : $Result(a) = s'$.
- Avant l'exécution de a, l'agent assigne des probabilités à chaque état résultant (s' = état résultant et e = évidence) :

$$EU(a|e) = \sum_{s'} P(Result(a) = s', |a, |e) U(s')$$

EU est l'utilité espérée de l'action a:

20

Théorie de la décision

- Théorie de la décision = théorie des probabilités + théorie de l'utilité
- Un agent est rationnel, si et seulement s'il choisit l'action qui donne la plus grande utilité anticipée, en moyenne, sur toutes les issues anticipées de l'action.

$$action = \arg\max_{a} EU(a|e)$$

- Ceci est appelé le principe de l'utilité maximale attendue (Maximum Expected Utility, MEU)

21

Structure d'un agent utilisant la théorie de la décision

```
function DT-AGENT(percept) returns an action
  static: belief-state, probabilistic beliefs about the current state of the world
          action, the agent's action

  update belief-state based on action and percept
  calculate outcome probabilities for actions,
     given action descriptions and current belief-state
  select action with highest expected utility
     given probabilities of outcomes and utility information
  return action
```


Variables aléatoires

- Une variable aléatoire réfère à une partie du monde dont le statut est initialement inconnu.
  - Ex: *Carie* (Est-ce que j'ai une carie ?)
- Les variables aléatoires ont un domaine de valeurs
  - Ex: le domaine de *Carie* est: (*vrai*, *faux*)
- Une proposition simple est d'attribuer une valeur à une variable aléatoire:
  - Ex: *Carie* = *vrai*

Types de variables aléatoires

- Booléennes: Leur domaine de valeur est: (*vrai*,*faux*)
  - On utilise souvent les abréviations suivantes:
    - *Carie = true* par *carie; Important*
    - *Carie = false* par *¬carie*
- Discrètes: Elles ont un domaine de valeur discret.
  - Ex: *Température* peut avoir comme domaine (*ensoleillé*, *pluvieux*, *nuageux*, *neige*).
  - Les valeurs du domaine doivent être mutuellement exclusives et exhaustives.
  - On peut utiliser *neige* comme abréviation à *Température = neige*

Types de variables aléatoires

- Continues: Leur domaine de valeur est composé de valeurs réelles.
  - Le domaine de valeur peut être tous les réels ou un sous ensemble comme l'intervalle [0,1].
  - Ex: X = 4.02 signifie que la variable a la valeur exacte 4.02
  - Les propositions peuvent contenir des inégalités, comme X < 4.02.

25

Probabilité inconditionnelle

- Définition: degré de croyance en absence de toute autre information.
  - Ex: *P(carie) = P(Carie = true) = 0.1, P(Température = Soleil) = 0.7*
  - *Attention:* ***P****(Carie) = <0.1,0.9>*
- Ces probabilités deviennent inutilisables si de nouvelles informations sont connues.
- Distribution de probabilité: un vecteur contenant toutes les probabilités pour chacune des assignations possibles.
  - Ex: **P**(*Température*) = (0.7, 0.2, 0.08, 0.02) pour (*ensoleillé*, *pluvieux*, *nuageux*, *neige*).

26

Distribution de probabilité jointe

- Représente les probabilités pour toutes les combinaisons de valeurs possibles.
  - Ex: **P**(*Température*, *Carie*)

		Température			
		Soleil	Pluie	Nuage	Neige
Carie	Vrai	0.144	0.02	0.016	0.02
	Faux	0.576	0.08	0.064	0.08

27

Probabilité conditionnelle

- Définition: degré de croyance lorsque certaines informations sont disponibles.
- $P(A|B)$: probabilité de *A* étant donné que tout ce que l'on sait est *B*.
  - Ex: *P(Carie | MalDeDent) = 0.8*

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}, \; P(b) > 0$$

$$\left.\begin{aligned} P(a \wedge b) &= P(a|b)P(b) \\ P(a \wedge b) &= P(b|a)P(a) \end{aligned}\right\} \text{Règle du produit}$$

28

Axiomes probabilistes

- Pour toutes propositions *a* et *b*:
  1. Toutes les probabilités sont entre 0 et 1.
  2. Les propositions vraies ont une probabilité de 1, les fausses de 0.
  3. La probabilité d'une disjonction est donnée par:

$$P(a \wedge b) = P(a) + P(b) - P(a \vee b)$$

29

Axiomes probablistes (2)

- Pourquoi un agent ne pourrait pas avoir l'ensemble de croyances suivant qui enfreint l'axiome 3?

$$\begin{array}{l|l} P(a) = 0.4 & P(a \wedge b) = 0.0 \\ P(b) = 0.3 & P(a \vee b) = 0.8 \end{array}$$

- L'agent 1 affirme, mon degré de croyance sur *a* est 0.4 et L'agent 2 est libre de parier pour ou contre.
- **Théorème (de Finetti) :** *si l'agent 1 exprime un ensemble de degrés de croyances qui violent les axiomes de la théorie des probabilités, Il existe une combinaison de paris de l'agent 2 qui garantit que l'agent 1 perde de l'argent à chaque fois.*

  On a donc intérêt à suivre les loi des probabilités

30

Inférence par énumération

- Utilise la distribution jointe complète pour inférer des probabilités.
- Exemple d'une distribution jointe complète :

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ cavity	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

31

Inférence par énumération

- Pour calculer la probabilité d'une proposition, il suffit d'additionner toutes les probabilités où la proposition est vraie.
- Ex: On peut aussi obtenir la probabilité inconditionnelle (probabilité marginale) d'une variable aléatoire.

$$P(toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$$

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ cavity	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

32

Inférence par énumération

- Ex:

$$\begin{aligned} P(cavity \vee toothache) &= 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 \\ &\quad + 0.016 + 0.064 = 0.28 \end{aligned}$$

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ cavity	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

33

Inférence par énumération

- On peut aussi calculer des probabilités conditionnelles.
- Ex:

$$P(\neg cavity|toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$
$$= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ cavity	.016	.064	.144	.576

34

Normalisation

- Le dénominateur de l'équation précédente peut être vu comme une constante de normalisation (α).
- Ex: $P(\neg cavity|toothache) = \alpha P(\neg cavity \wedge toothache)$

et donc $\alpha = \frac{1}{P(toothache)}$ soit $\alpha = \frac{1}{0.2} = 5$

35

Normalisation

$$\mathbf{P}(Cavity|toothache) = \alpha\,\mathbf{P}(Cavity, toothache)$$
$$= \alpha\,[\mathbf{P}(Cavity, toothache, catch) + \mathbf{P}(Cavity, toothache, \neg catch)]$$
$$= \alpha\,[\langle 0.108, 0.016\rangle + \langle 0.012, 0.064\rangle] = \alpha\,\langle 0.12, 0.08\rangle = \langle 0.6, 0.4\rangle$$

- Idée générale: Calculer la distribution d'une variable en fixant les variables d'évidences (*Toothache*) et en effectuant une somme sur les variables cachées (*Catch*).

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ cavity	.016	.064	.144	.576

36

Inférence utilisant des distributions conjointes complètes

Marginalisation ou sommation partielle : On peut écrire la règle de marginalisation générale suivante pour tout ensemble de variables $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$.

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{z}} \mathbf{P}(\mathbf{Y}, \mathbf{z})$$

La règle de conditionnment nous permet aussi d'écrire:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{z}} \mathbf{P}(\mathbf{Y}|\mathbf{z})P(\mathbf{z})$$

Finalement, une requête du type $\mathbf{P}(X|\mathbf{e})$ peut être évaluée comme suit:

$$\mathbf{P}(X|\mathbf{e}) = \alpha\mathbf{P}(X, \mathbf{e}) = \alpha \sum_{\mathbf{y}} \mathbf{P}(X, \mathbf{e}, \mathbf{y})$$

37

Problèmes de l'inférence par énumération

- Complexité de temps en $O(d^n)$ où n est le nombre de variables et d le nombre maximal de valeurs pour une variable.
- Complexité en espace de $O(d^n)$ pour emmagasiner la table de distribution.
- Très compliqué de trouver toutes les d^n valeurs pour remplir la table.
- Pas vraiment applicable en pratique, mais c'est une base théorique pour d'éventuelles méthodes d'approximation.

38

Exercice

- À l'aide de la table de distribution jointe suivante, calculer :

a. $P(toothache)$
b. $\mathbf{P}(Cavity)$
c. $\mathbf{P}(Toothache|cavity)$
d. $\mathbf{P}(Cavity|toothache \vee catch)$.

	toothache		$\neg$*toothache*	
	catch	$\neg$*catch*	*catch*	$\neg$*catch*
cavity	0.108	0.012	0.072	0.008
$\neg$*cavity*	0.016	0.064	0.144	0.576

39

Correction

13.8 The main point of this exercise is to understand the various notations of bold versus non-bold P, and uppercase versus lowercase variable names. The rest is easy, involving a small matter of addition.

a. This asks for the probability that *Toothache* is true.

$$P(toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$$

b. This asks for the vector of probability values for the random variable *Cavity*. It has two values, which we list in the order $\langle true, false \rangle$. First add up $0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$. Then we have

$$\mathbf{P}(Cavity) = \langle 0.2, 0.8 \rangle\ .$$

c. This asks for the vector of probability values for *Toothache*, given that *Cavity* is true.

$$\mathbf{P}(Toothache|cavity) = \langle (.108 + .012)/0.2, (0.072 + 0.008)/0.2 \rangle = \langle 0.6, 0.4 \rangle$$

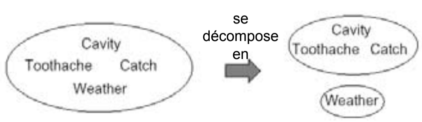
d. This asks for the vector of probability values for *Cavity*, given that either *Toothache* or *Catch* is true. First compute $P(toothache \vee catch) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 + 0.072 + 0.144 = 0.416$. Then

$$\mathbf{P}(Cavity|toothache \vee catch) = \langle (0.108 + 0.012 + 0.072)/0.416, (0.016 + 0.064 + 0.144)/0.416 \rangle = \langle 0.4615, 0.5384 \rangle$$

40

Indépendance

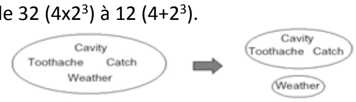
- Deux variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes si :
  - $\mathbf{P}(X|Y) = \mathbf{P}(X)$ ou $\mathbf{P}(Y|X) = \mathbf{P}(Y)$ ou $\mathbf{P}(X,Y) = \mathbf{P}(X)\mathbf{P}(Y)$



41

Indépendance

- L'indépendance absolue est très puissante pour diminuer la complexité d'un problème.
  - Dans notre exemple, le nombre d'entrées dans la table est passé de 32 ($4x2^3$) à 12 ($4+2^3$).



- Toutefois, elle est rare en pratique.
- Quoi faire quand il y a trop de variables dépendantes ?

42

Règle de Bayes

- En partant de la règle du produit

$$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b)$$
$$P(a \wedge b) = P(b|a)P(a)$$

- On peut obtenir la règle suivante:

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)\ P(b)}{P(a)}$$

- C'est la règle de Bayes qui est sous-jacente à tous les systèmes modernes d'IA utilisant l'inférence probabiliste.

43

Règle de Bayes

- Règle très utile, en particulier pour évaluer des probabilités au niveau du diagnostique à partir des probabilités causales

$$P(cause|effet) = \frac{P(effet|cause)\ P(cause)}{P(effet)}$$

44

Règle de Bayes: Ex

– Ex: *m*: méningite et *s*: raideur au cou.

$$\begin{aligned} P(s|m) &= 0.5 \\ P(m) &= 1/50000 \\ P(s) &= 1/20 \\ P(m|s) &= \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = \frac{0.5 \times 1/50000}{1/20} = 0.0002 \end{aligned}$$

– On s'attend à ce que seulement 1 patient sur 5000 qui a un mal de cou ait une méningite

45

Règle de Bayes et normalisation

- En utilisant la normalisation, on peut réécrire la règle de Bayes:

$$\mathbf{P}(M|s) = \alpha \langle P(s|m)P(m), P(s|\neg m)P(\neg m)\rangle$$

- La forme générale de la règle de Bayes avec normalisation est:

$$\mathbf{P}(Y|X) = \alpha\, \mathbf{P}(X|Y)\mathbf{P}(Y)$$

46

Indépendance conditionnelle

- Dans l'exemple du dentiste, on ne peut pas dire que les variables *Toothache* et *Catch* sont indépendantes. Si on applique la règle de Bayes, on obtient:

$$\mathbf{P}(Cavity|toothache \wedge catch) = \alpha\, \mathbf{P}(toothache \wedge catch|Cavity)\mathbf{P}(Cavity)$$
$$= \alpha\{0.108, 0.016\} \approx \{0.871, 0.129\}$$

- Toutefois ça ne scale pas, *Toothache* et *Catch* sont conditionnellement indépendantes sachant la présence ou l'absence d'une carie. Donc, on peut dire:

$$\mathbf{P}(toothache \wedge catch|Cavity) = \mathbf{P}(toothache|Cavity)\mathbf{P}(catch|Cavity)$$

- En remplaçant, on obtient:

$$\mathbf{P}(Cavity|toothache \wedge catch) = \alpha\, \mathbf{P}(toothache|Cavity)\mathbf{P}(catch|Cavity)\mathbf{P}(Cavity)$$

47

Indépendance conditionnelle

- La définition générale d'une Independence conditionnelle de 2 variables X et Y, étant donnée Z est :

$$\mathbf{P}(X, Y|Z) = \mathbf{P}(X|Z)\mathbf{P}(Y|Z)$$

- Dans l'exemple des dents, on pourrait asserter une Independence conditionnelle entre les variable *Toothache* et *Catch*, étant donnée *Cavity*, soit:

$$\mathbf{P}(Toothache, Catch|Cavity) = \mathbf{P}(Toothache|Cavity)\mathbf{P}(Catch|Cavity)$$

48

Indépendance conditionnelle

- L'indépendance conditionnelle permet de diminuer la grandeur des tables de distribution jointe.

$$\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity)$$
$$= \mathbf{P}(Toothache, Catch|Cavity)\mathbf{P}(Cavity) \quad \text{(product rule)}$$
$$= \mathbf{P}(Toothache|Cavity)\mathbf{P}(Catch|Cavity)\mathbf{P}(Cavity) \quad \text{(using 13.14)}$$

- On a remplacé une grande table par trois petites tables plus faciles à calculer.
- L'utilisation de l'indépendance conditionnelle permet de réduire la grandeur de la représentation de la distribution jointe d'exponentiel en *n* [$O(d^n)$] à linéaire en *n*.
- L'indépendance conditionnelle est une forme de connaissance robuste pour les environnements incertains.

49

Indépendance conditionnelle

- Comme pour le problème du dentiste, souvent on a une cause influençant directement un certain nombre d'effets qui sont tous conditionnellement indépendants sachant la cause.

$$\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity) = \mathbf{P}(Cavity)\mathbf{P}(Toothache|Cavity)\mathbf{P}(Catch|Cavity)$$

50

Indépendance conditionnelle

- Donc, la distribution complète jointe peut être écrite:

$$\mathbf{P}(Cause, Effect_1, \ldots, Effect_n) = \mathbf{P}(Cause)\prod_i \mathbf{P}(Effect_i|Cause)$$

- Cette distribution est appelée Modèle de Bayes naïf ou classificateur bayésien

51

Wumpus World revisité

- Exemple de raisonnement probabiliste dans le monde du Wumpus.
- Supposons l'environnement ci-contre où les cases [1,3], [2,2] et [3,1] peuvent contenir un trou.
- On veut savoir la probabilité de contenir un trou pour chacune de ces cases.

52

Wumpus World

- Les propriétés de l'environnement sont :
  - Un trou cause une brise (B) dans les cases adjacentes.
  - Toutes les cases sauf [1,1] contiennent un trou avec une probabilité de 0.2.
- Identifier l'ensemble des variables aléatoires:
  - P_{ij} = vrai si [*i*, *j*] contient un trou.
  - B_{ij} = vrai si [*i*, *j*] contient une brise. On ajoute ces variables uniquement pour les cases observées, dans notre cas: [1,1],[1,2] et [2,1].

53

Spécifier la distribution jointe complète

- La distribution jointe complète est:

$$\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4}, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1})$$

- Avec la règle du produit, cette expression devient:

$$\mathbf{P}(B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1} \mid P_{1,1}, \ldots, P_{4,4})\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4})$$

- On a appliqué la règle du produit pour obtenir une distribution de la forme: *P*(*Effet*|*Cause*)

54

Spécifier la distribution jointe complète

- Distribution jointe: $\mathbf{P}(B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1} \mid P_{1,1}, \ldots, P_{4,4})\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4})$
- Avec cette décomposition, on peut facilement voir les valeurs des probabilités jointes.
  - Pour le premier terme, la valeur est de 1 si la brise est adjacente à un trou, 0 sinon.
  - Pour le deuxième terme, chaque case peut contenir un trou avec une probabilité de 0.2, indépendamment des autres cases, donc on peut écrire que:

$$\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4}) = \prod_{i,j=1,1}^{4,4} \mathbf{P}(P_{i,j})$$

55

Observations et requête

- On sait: $b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1}$
  $known = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1}$
- On veut trouver: $\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b)$
- Supposons *Unknown* = P_{ij} autre que $P_{1,3}$ et *known*
- Pour l'inférence par énumération, on a:

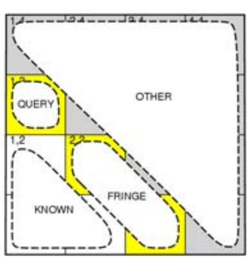
$$\mathbf{P}(P_{1,3}|known, b) = \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, unknown, known, b)$$

- La somme contient 2^{12} = 4096 termes.

56

Utiliser les indépendances conditionnelles

- Supposons *Fringe*, les variables qui sont adjacentes aux cases visitées.
- Supposons *Other*, les variables pour les autres cases inconnues.
- Les brises observées sont indépendantes des autres variables sachant les variables *known*, *fringe* et *query*.



$\mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, unknown) = \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, fringe)$

57

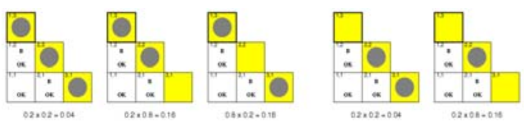
Calculs

$$\mathbf{P}(P_{1,3}|known, b) = \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, unknown, known, b)$$
$$= \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(b|P_{1,3}, known, unknown)\mathbf{P}(P_{1,3}, known, unknown)$$
$$= \alpha \sum_{fringe} \sum_{other} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe, other)\mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other)$$
$$= \alpha \sum_{fringe} \sum_{other} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe)\mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other)$$
$$= \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe) \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other)$$
$$= \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe) \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3})P(known)P(fringe)P(other)$$
$$= \alpha\, P(known)\mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe)P(fringe) \sum_{other} P(other)$$
$$= \alpha'\, \mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known, P_{1,3}, fringe)P(fringe)$$

58

Calculs

- Le premier terme de la somme (soit **P**(*b* | known, $P_{1,3}$, *fringe*) vaut 1 lorsque les valeurs de la *fringe* sont consistantes avec les observations, 0 sinon.
- Donc, on a juste à faire la somme pour les modèles consistants.



$$\mathbf{P}(P_{1,3}|known, b) = \alpha' \langle 0.2(0.04 + 0.16 + 0.16),\ 0.8(0.04 + 0.16) \rangle \approx \langle 0.31, 0.69 \rangle$$

59

Discussion

- Donc [1,3] (et [3,1] par symétrie) a une probabilité de 31% de contenir un puits.
- Un calcul similaire en [2,2] (à faire en exercice) montre que la probabilité de contenir un puits est de 86%, dans ces conditions l'agent Wumpus doit éviter [2,2].

60